Лекция на тему: «Численные методы решения нелинейных уравнений.

Метод деления отрезка пополам»

Общие понятия

Задачи решения уравнений постоянно возникают на практике, например, в экономике, развивая бизнес, вы хотите узнать, когда прибыль достигнет определенного значения, в медицине при исследовании действия лекарственных препаратов, важно знать, когда концентрация вещества достигнет заданного уровня и т.д.

В задачах оптимизации часто необходимо определять точки, в которых производная функции обращается в 0, что является необходимым условием локального экстремума.

В статистике при построении оценок методом наименьших квадратов или методом максимального правдоподобия также приходится решать нелинейные уравнения и системы уравнений. Итак, возникает целый класс задач, связанных с нахождением решений нелинейных уравнений, например, уравнения http://statistica.ru/upload/medialibrary/chisl-methods-resh-ur/image002.png или уравнения http://statistica.ru/upload/medialibrary/chisl-methods-resh-ur/image004.png и т.д.

В простейшем случае у нас имеется функция http://statistica.ru/upload/medialibrary/chisl-methods-resh-ur/image006.png, заданная на отрезке (a, b) и принимающая определенные значения.

Каждому значению x из этого отрезка мы можем сопоставить число http://statistica.ru/upload/medialibrary/chisl-methods-resh-ur/image008.png, это и есть функциональная зависимость, ключевое понятие математики.

Нам нужно найти такое значение, http://statistica.ru/upload/medialibrary/chisl-methods-resh-ur/image010.png при котором http://statistica.ru/upload/medialibrary/chisl-methods-resh-ur/image012.pngтакие http://statistica.ru/upload/medialibrary/chisl-methods-resh-ur/image014.png называются корнями функции http://statistica.ru/upload/medialibrary/chisl-methods-resh-ur/image016.png

Визуально нам нужно определить точку пересечения графика функции http://statistica.ru/upload/medialibrary/chisl-methods-resh-ur/image008_0000.png с осью абсцисс.

Метод деления отрезка пополам

Простейшим методом нахождения корней уравнения http://statistica.ru/upload/medialibrary/chisl-methods-resh-ur/image002_0000.png является *метод деления отрезка пополам* или дихотомия. Этот метод является интуитивно ясным.

Алгоритм состоит в следующем.

Предположим, мы нашли две точки http://statistica.ru/upload/medialibrary/chisl-methods-resh-ur/image004_0000.png и http://statistica.ru/upload/medialibrary/chisl-methods-resh-ur/image006_0000.png, такие что http://statistica.ru/upload/medialibrary/chisl-methods-resh-ur/image008_0001.png и http://statistica.ru/upload/medialibrary/chisl-methods-resh-ur/image010_0000.png имеют разные знаки, тогда между этими точками находится хотя бы один корень функции http://statistica.ru/upload/medialibrary/chisl-methods-resh-ur/image012_0000.png.

Поделим отрезок http://statistica.ru/upload/medialibrary/chisl-methods-resh-ur/image014_0000.png пополам и введем среднюю точку http://statistica.ru/upload/medialibrary/chisl-methods-resh-ur/image016_0000.png.

Тогда либо http://statistica.ru/upload/medialibrary/chisl-methods-resh-ur/image018.png, либо http://statistica.ru/upload/medialibrary/chisl-methods-resh-ur/image020.png.

Оставим ту половину отрезка, для которой значения на концах имеют разные знаки. Теперь этот отрезок снова делим пополам и оставляем ту его часть, на границах которой функция имеет разные знаки, и так далее, достижения требуемой точности.

Очевидно, постепенно мы сузим область, где находится корень функции, а, следовательно, с определенной степенью точности определим его.

Заметьте, описанный алгоритм применим для любой непрерывной функции.

К достоинствам метода деления пополам следует отнести его высокую надежность и простоту.

Недостатком метода является тот факт, что прежде чем начать его применение, необходимо найти две точки, значения функции в которых имеют разные знаки. Очевидно, что метод неприменим для корней четной кратности и также не может быть обобщен на случай комплексных корней и на системы уравнений. Порядок сходимости метода линейный, на каждом шаге точность возрастает вдвое, чем больше сделано итераций, тем точнее определен корень.