**Необходимо записать лекцию, и выполнить самостоятельную работу. Конспект и выполненную самостоятельную работу скинуть на почту** **ev.174@mail.ru** **или vk.**

*1) Понятие обратимой функции. Достаточное условие обратимости.*

**Определение 1.** Функцию $y=f\left(x\right), x\in X$ называют **обратимой**, если любое свое значение она принимает только в одной точке множества *X*.

**Теорема.** Если функция $y=f\left(x\right)$ монотонна на множестве *X*, то она обратима.

Доказательство:

1. Пусть функция *y=f(x)* возрастает на множестве *Х* и пусть *х1≠х2*  – две точки множества *Х*.
2. Для определенности пусть *х1*< *х2*. Тогда из того, что *х1*< *х2*  в силу возрастания функции следует, что *f(х1)* < *f(х2)*.
3. Таким образом, разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции, т.е. функция обратима.
4. Аналогично доказывается теорема в случае убывающей функции.

**Замечание.** Монотонность функции, является **достаточным** условием существования обратной функции. Но оно **не является** необходимым условием.

*2) Понятие обратной функции. Алгоритм составления обратной функции.*

**Определение 2.** Пусть обратимая функция *y=f(x)* определена на множестве *Х*и область ее значений *Е(f)=Y*. Поставим в соответствие каждому *y* из *Y* то единственное значение *х*, при котором *f(x)=y.*Тогда получим функцию, которая определена на *Y*, а *Х* – область значений функции. Эту функцию обозначают *x=f -1(y),* $y\in Y$ и называют **обратной** по отношению к функции *y=f(x),*$ x\in X$.

**Алгоритм составления обратной функции для функции *y=f(x),*** $x\in X$***.***

1. Убедиться, что функция  *y=f(x)* обратима на промежутке *Х*.
2. Выразить переменную *х* через *у* из уравнения *y=f(x),* учитывая при этом, что $ x\in X$.
3. В полученном равенстве поменять местами *х* и *у*. Вместо *х=f -1(y)* пишут *y=f -1(x).*

**Пример 1.** Показать, что для функции *y=2x-5* существует обратная функция, и найти ее аналитическое выражение.

*Решение*. Линейная функция *y=2x-5* определена на *R*, возрастает на *R* и область ее значений есть *R.* Значит, обратная функция существует на *R*. Чтобы найти ее аналитическое выражение, решим уравнение *y=2x-5* относительно *х*; получим $x=\frac{y+5}{2}$.  Переобозначим переменные, получим искомую обратную функцию  $y=\frac{x+5}{2}$. Она определена и возрастает на R.

**Пример 2.** Показать, что для функции *y=x2, х ≤ 0* существует обратная функция, и найти ее аналитическое выражение.

*Решение*. Функция непрерывна, монотонна в своей области определения, следовательно, она обратима. Проанализировав области определения и множества значений функции, делается соответствующий вывод об аналитическом выражении для обратной функции, которая имеет вид $y=-\sqrt{x}$.

*3) Свойства взаимно обратных функций.*

 **Свойство 1.** Если *g* – функция обратная к  *f*, то и *f* – функция обратная к *g* (функции взаимно обратные), при этом *D(g)=E(f), E(g)=D(f)*.

**Свойство 2.** Если функция $ y=f\left(x\right)$ возрастает (убывает) на множестве Х, а У – область значений функции, то обратная функция $ x=f^{-1}\left(y\right)$ возрастает (убывает) на У.

**Свойство 3.** Чтобы получить график функции $ y=f^{-1}\left(x\right)$, обратной по отношению к функции $ y=f\left(x\right)$, надо график функции$ y=f\left(x\right) $преобразовать симметрично относительно прямой *у=х*.

**Свойство 4.** Если нечетная функция обратима, то обратная ей тоже нечетная.

**Свойство 5.** Если функции *f(x)* и$g(x)$взаимно обратные, то для любого $x\in D(f)$ справедливо $g\left(f\left(x\right)\right)=x$, а для любого $ x\in D(g)$ справедливо $f\left(g\left(x\right)\right)=x$.

**Пример 3.** Построить график функции обратной $y=x^{2}$, если это возможно.

*Решение.*  На всей своей области определения данная функция не имеет обратной, поскольку она не монотонна. Поэтому рассмотрим промежуток, на котором функция монотонна: $\left\{\begin{array}{c}y=x^{2}\\x\geq 0\end{array}\right.$ , значит, существует обратная. Найдем *ее*. Для этого выразим  *x* через *y* : $x=\sqrt{y}$ . Переобозначим $y=\sqrt{x}$  - обратная функция. Построим графики функций (рис. 5) и убедимся, что они симметричны относительно прямой *y=x*.



Рис. 5

**Пример 4.** Найдите множество значений каждой из взаимно обратных функций $f\left(x\right), g(x)$, если известно, что $D\left(f\right)=\left(0;+\infty \right), D\left(g\right)=\left(-\infty ;\left.-1\right]\right.$.

*Решение.* Согласно свойству 1 взаимно обратных функций, имеем $E\left(g\right)=\left(0;+\infty \right), E\left(f\right)=\left(-\infty ;\left.-1\right]\right.$.

**Самостоятельная работа по теме «Определение обратной функции. Достаточное условие обратимости функции»**

***Задание 1.***

Является ли функции обратимыми на всей области определения? Если да, то найдите обратную к ней.

*a)* $y=x^{5}$; *b)* $f\left(x\right)=(x-3)^{2}$*; c)* $y=\frac{2}{x+3}$*.*

***Задание 2.***

Являются ли взаимно обратными функции:

*а)* $f\left(x\right)=\frac{7}{3}x+\frac{3}{7} и g\left(x\right)=\frac{3}{7}x+\frac{7}{3}$ *;*

*b)* $f\left(x\right)=2x+3 и g\left(x\right)=0,5x-1,5$*.*

***Задание 3.***

Рассмотрите функцию $y=x^{2}-2$ на каждом из указанных промежутков, если на этом промежутке функция обратима, то задайте обратную ей аналитически, укажите область определения и область значений:

*a) R; b) [1;2); c) (-1; 5]; d) [-2;0].*

***Задание 4.***

Докажите, что функция $g\left(x\right)=x^{2}-6x+10$ необратима. Найдите функцию обратную ей на промежутке $\left[3; +\left.\infty \right)\right.$ и постройте ее график.

***Задание 5.***

Постройте график функции и определите, существует ли для нее обратная функция. Если да, то на том же чертеже постройте график обратной функции и задайте ее аналитически:

*a)* $y=3x+x$*; b)* $y=x^{2}+2x$*.*

Вопросы:

1. Какая функция называется обратимой?

2. Какая функция называется обратной?

3. Как связаны между собой области определения и множества значений прямой и обратной функций?

4. Сформулируйте достаточное условие обратимости функции.

5. Функция обратная возрастающей является убывающей или возрастающей?

6. Функция обратная нечетной является четной или нечетной?

7. Как расположены графики взаимно обратных функций?