Задание:

1. **Прочитайте материал темы урока.**

2. **Запишите в конспект алгоритм нахождения обратной матрицы и примеры 1, 2 и 3.**

3. **Выполните задание для самостоятельного решения:**

вышлите конспект к 13.09.2022г по адресу orlova__olga@list.ru (между фамилией и именем два подчеркивания)

Тема: Обратная матрица.

Вычисление определителей. Определитель матрицы *A* размера *2*х*2* (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы *A* размера *3*х*3* (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу *«раскрытие определителя по первой строке»:*

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример 1. Найти: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Решение. При нахождении определителя воспользуемся сначала формулой $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$, а затем (для вычисления определителей 2-го порядка) формулой $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Получим: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1 \cdot 0 - 5 \cdot 2) + 3 \cdot (4 \cdot 0 - 3 \cdot 2) - 1 \cdot \big(4 \cdot 5 - 3 \cdot (-1)\big) =$
$2 \cdot (-10) + 3 \cdot (-6) - 1 \cdot 23 = -20 - 18 - 23 = -61$

Минором элемента определителя называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания строки и столбца, в которых стоит выбранный элемент.

Обозначение: a_{ij} – выбранный элемент определителя, M_{ij} – его минор.

Пример 2: Для $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ $a_{21} = -5, M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11.$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента определителя называется его минор, если сумма индексов данного элемента i+j есть число четное, или число, противоположное минору, если i+j нечетно, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Нахождение обратной матрицы является важной составляющей в разделе линейной алгебры. С помощью таких матриц, если они существуют, можно быстро найти решение системы линейных уравнений

Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A ,если выполняются следующие равенства

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Если определитель матрицы A отличен от нуля, то матрицу называют невырожденной.
Для того, чтобы матрица имела обратную необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной
Алгоритм нахождения обратной матрицы:
Пусть имеем квадратную матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и нужно найти обратную к ней. Для этого нужно выполнить следующие действия:

1. Найти определитель матрицы $|\mathbf{A}|=\Delta$. Если он не равен нулю то выполняем следующие действия. В противном случае данная матрица вырождена и для нее не существует обратной
2. Найти алгебраические дополнения *(A_{ij})* элементов матрицы A. Они равны минорам, умноженным на -1 в степени суммы строки и столбца, для которого ищем.
3. Составить матрицу из алгебраических дополнений элементов матрицы A и протранспонировать ее. Эта матрица называется присоединенной и обозначается $\tilde{A}$.
4. Разделить присоединенную матрицу на $|\mathbf{A}|=\Delta$. Полученная матрица будет обратной.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Пример 3:

Найдем матрицу, обратную к $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

$\Delta_A=-6\neq 0,$ следовательно, матрица А невырожденная. Найдем алгебраические дополнения к ее элементам:

$A_{11}=-1, A_{12}=7, A_{13}=2, A_{21}=-1, A_{22}=-5, A_{23}=-4, A_{31}=-1, A_{32}=1, A_{33}=2.$ Не забудем, что алгебраические дополнения к элементам **строки** матрицы А образуют в обратной матрице **столбец** с тем же номером. Итак, $A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$

Можно убедиться, что найденная матрица действительно удовлетворяет определению A^{-1}. Найдем

$$A\cdot A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 7 & -5 & 1\\ 2 & -4 & 2\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Тот же результат получим и при перемножении в обратном порядке.

Задание для самостоятельного решения

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 2\\ 7 & 1 & -2\end{vmatrix}$$

2. Найдите все миноры определителя

$$\begin{vmatrix}3 & 8 & 0\\ 7 & -9 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$$