Задание:

1. **Выполните практическую работу:**
   - запишите примеры 1,2,3
   - решите самостоятельно один из вариантов
   - ответьте на контрольные вопросы
2. **Вышлите конспект к 17.11.2021 г,** по адресу **orlova__olga@list.ru**

(между фамилией и именем два подчеркивания)

Практическая работа №10.

Тема: Построение криволинейной трапеции. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и вычислению объёмов.

Цель:- закрепить навыки вычисления площадей плоских фигур и объема тела вращения с помощью определённого интеграла**.**

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники, линейка, карандаш.

Порядок выполнения работы:

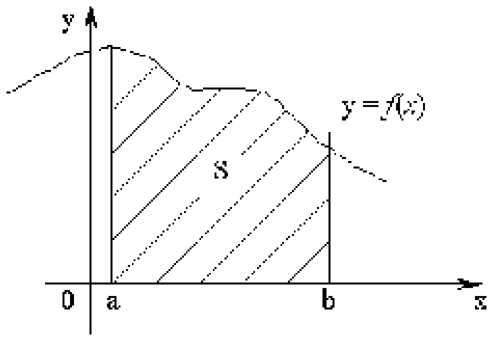
1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Определение. Разность F (b)– F (a) называется интегралом от функции f (x) на отрезке [a ; b] и обозначается так: $\int_a^b f(x)dx$, т.е. $\int_a^b f(x)dx$ = F (b)– F (a) – формула Ньютона-Лейбница.

Вычисление площадей плоских фигур.

Геометрический смысл интеграла.



Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке [a ; b] функции f (x), осью Ox и прямыми x=a и x= b:

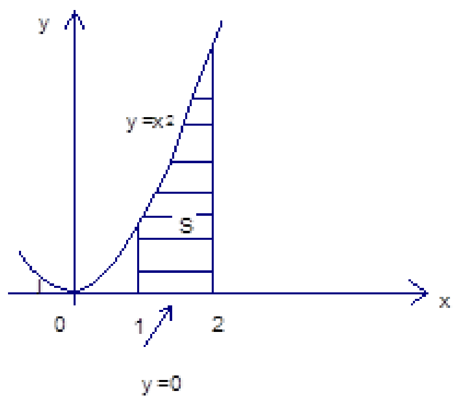
$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(a) - F(b)$$.

Пример 1.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 2.$

Решение.

Искомая площадь:



Формула:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Это общая формула. Конкретно к нашему случаю она применима так:

Пределы интегрирования $a = 1, b = 2, f(x) = x^2$.

$S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}$.

Ответ: $\frac{7}{3}$

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [a,b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx.$$

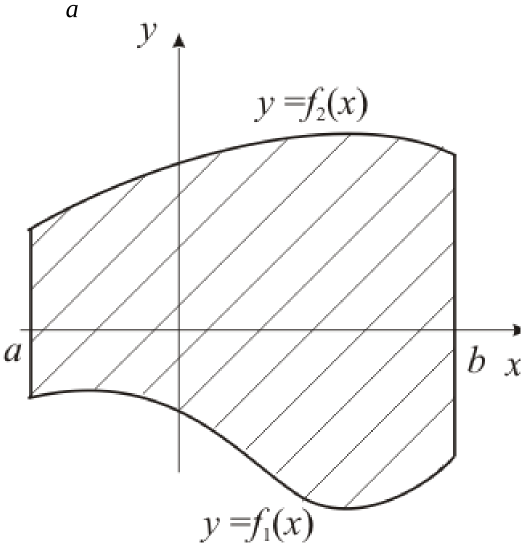


Рис. 1

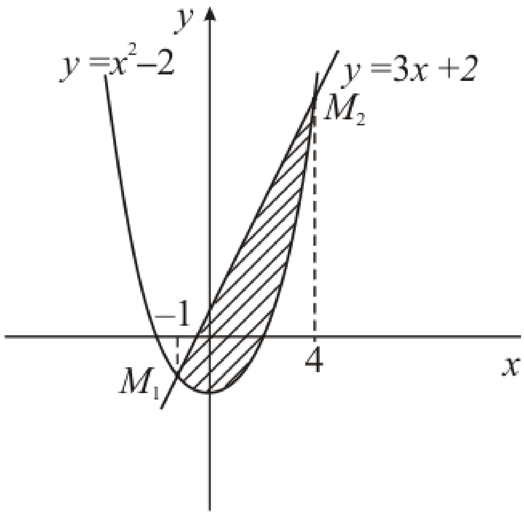


Рис. 2

Приме 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 2,\ y = 3x + 2.$

*Решение***.** Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
y	–2	–1	–1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0,\ 2)$ и $(-1, -1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3\cdot(-1)+2=-1,\;\; y_2 = 3\cdot 4+2=14.$

Итак, $M_1(-1,-1),\;\; M_2(4,14).$

Площадь полученной фигуры найдем по формуле

$$S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx. \quad \text{, в которой}$$

$$f_2(x)=3x+2,\;\; f_1(x)=x^2-2,$$

поскольку $f_2(x)\ge f_1(x)$ для всех $x\in[-1,4]$.

Получим:

$$S=\int_{-1}^{4}\left(3x+2-\left(x^2-2\right)\right)dx=\int_{-1}^{4}\left(3x-x^2+4\right)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Bigg|_{-1}^{4}=$$

$$=\frac{3\cdot 4^2}{2}-\frac{4^3}{3}+4\cdot 4-\left(\frac{3\cdot(-1)^2}{2}-\frac{(-1)^3}{3}+4\cdot(-1)\right)=24-\frac{64}{3}+16-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+4=$$

$$=44-\frac{65}{3}-\frac{3}{2}=\frac{125}{6}=20\frac{5}{6}\;(\text{кв.ед.})$$

Вычисление объемов тел вращения.

Если тело образовано вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью OX и прямыми $x=a$, $x=b$ (рис.3), то его объем вычисляется по формуле:

$$V=\pi\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx.$$

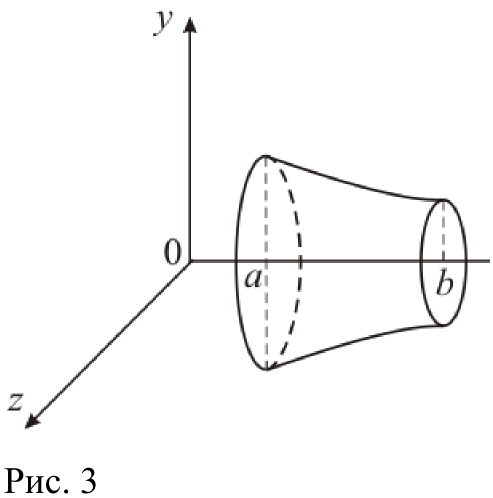


Рис. 3

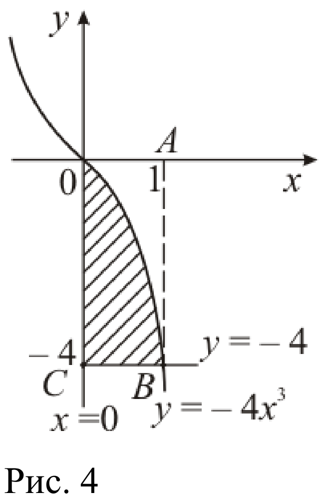


Рис. 4

Пример 3. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y=-4x^3,\;\; x=0,\;\; y=-4.$

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 4).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры $OABC$, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры OAB. Тогда искомый объем $V = V_1 - V_2$. По формуле $V = \pi\int\limits_a^b \left(f\left(x\right)\right)^2 dx$.

найдем V_1 и V_2: $V_1 = \pi\int\limits_0^1 \left(-4\right)^2 dx = \pi 16x\Big|_0^1 = 16\pi$ (ед. объема);

$V_2 = \pi\int\limits_0^1 \left(-4x^3\right)^2 dx = 16\pi\int\limits_0^1 x^6 dx = 16\pi\frac{x^7}{7} = \frac{16\pi}{7}$ (ед. объема);

$V = V_1 - V_2 = 16\pi - \frac{16\pi}{7} = \frac{96}{7}\pi \approx 43{,}085$ (ед. объема).

Задание для самостоятельного решения:

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1. $y = x^3, y = 0, x = -2, x = 0$
2. $y = x^2, y = 0, x = -3, x = 0$
3. $y = x^3, y = 0, x = -1, x = 2$
4. $y = x^3, y = 0, x = -1, x = 3$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1. $y = x^2 - 2,\ y = 1 - 2x$
2. $y = x^3,\quad y = 8,\quad x = 0$
3. $y = 3x^2 + 1,\quad y = 3x + 6$
4. $y = x^2,\ y = x + 1$

3. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями.

1. $x^2 - y = 0,\quad y = 1$
2. $x^2 + y = 0,\quad y = -1$
3. $x - y^2 = 0,\quad x = 1$
4. $y = 4x^3,\quad x = 0,\quad y = -4$

Контрольные вопросы:

1. Сформулировать определение определенного интеграла.
2. Сформулировать геометрический смысл определенного интеграла.
3. Записать формулы для вычисления площади плоской фигуры.
4. Записать формулу для вычисления объема тела.