СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайной величиной (с.в.) называется величина, которая в результате опыта может принять одно из ее возможных значений, но заранее неизвестно, какое именно. С.в. считается заданной, если задан ее закон распределения, который может иметь различные формы. Законом распределения с.в. называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями с.в. и соответствующими им вероятностями. Случайные величины обычно обозначают буквами $X, Y, Z, \ldots$ Различают дискретные и непрерывные с.в.

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЗАКОНЫ ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Основные теоретические сведения

С.в. называется *дискретной*, если множество всех ее значений можно заранее перечислить, перенумеровать. Закон распределения дискретной с.в. можно задать таблицей, имеющей следующий вид:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_i	$\ldots$	p_n

Эта таблица называется *рядом распределения с.в.* В ней перечислены все возможные значения с.в. x_i и соответствующие им вероятности

$$p_i = P(X = x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Ряд распределения можно изобразить графически. Соединяя точки графика отрезками прямых, получаем *многоугольник распределения* (рис.19).

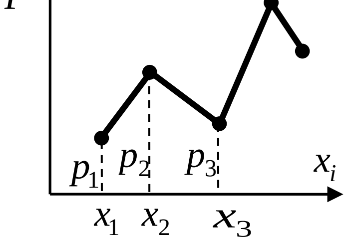

Рис. 19

Закон распределения можно также задать с помощью *функции распределения.* Функцией распределения $F(x)$ (интегральной функцией распределения, интегральным законом распределения) называется вероятность события $P(X<x)$: $$F(x)=P(X<x).$$

Свойства функции распределения:

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$;

3) $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$ (неубывающая функция);

4) $F(-\infty) = 0$;

5) $F(+\infty) = 1$;

6) функция распределения непрерывна слева:

$$\lim_{x \to a-0} F(x) = F(a).$$

Для дискретной с.в. функция $F(x)$ имеет ступенчатый вид. Функция $F(x)$ имеет скачки в точках x_i, где x_i – значения данной с.в. (рис.20). Величина скачков равна вероятностям этих значений $P(X = x_i)$.

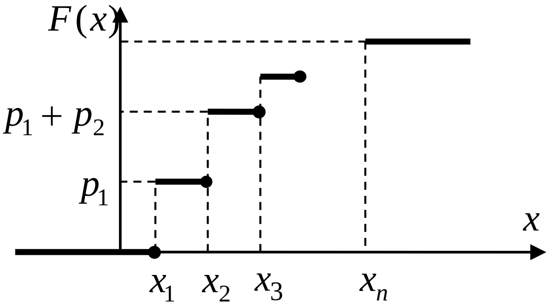

Рис. 20

Числовые характеристики дискретных с.в. Математическим ожиданием (м.о.) дискретной с.в. называется сумма попарных произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M[X] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n.$$

М.о. характеризует некоторое среднее значение, около которого группируются все возможные значения случайной величины; м.о. имеет ту же размерность, что и с.в.

Начальным моментом порядка s дискретной с.в. называется сумма

$$\alpha_s[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i .$$

Математическое ожидание – это первый начальный момент.

Центрированной с.в., соответствующей с.в. X, называется отклонение с.в. X от ее м.о.: $\overset{o}{X} = X - m$, $m = M[X]$. Моменты центрированной с.в. называются центральными моментами.

Центральным моментом порядка s с.в. X называется математическое ожидание соответствующей центрированной с.в. в степени s:

$$\mu_s[X] = M[\overset{\circ}{X}] = M\left[(X-m)^s\right].$$

Для дискретной с.в. центральный момент порядка s находят по формуле

$$\mu_s[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^s p_i .$$

Дисперсией называется второй центральный момент. Используется обозначение: $\mu_2[X] = D[X]$. Для дискретной с.в.

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i .$$

Дисперсия характеризует рассеивание (разбросанность) значений с.в. около ее математического ожидания. Через начальные моменты дисперсия вычисляется по формуле $D[X] = M[X^2] - M^2[X]$.

Свойства дисперсии:

1) $D[C] = 0, \;\; C = \text{const}$;

2) $D[CX] = C^2 D[X], \;\; C = \text{const}$;

3) $D[X - C] = D[X]$.

Дисперсия имеет размерность квадрата с.в., поэтому используют среднеквадратическое отклонение с.в. X (стандарт):

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}.$$

С.в. X, у которой $M[X] = 0$, $\sigma[X] = 1$, называют стандартизированной.

Примеры

Пример 1. В денежной лотерее выпущено 1000 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 100 руб., четыре – по 50 руб., пять – по 40 руб. и десять – по 10 руб. Построить ряд распределений стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета. Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Р е ш е н и е . Случайная величина X (стоимость возможного выигрыша) может принять следующие значения:

$$x_1 = 0, \; x_2 = 10, \; x_3 = 40, \; x_4 = 50, \; x_5 = 100 .$$

Вероятности этих значений соответственно будут равны