Министерство образования и науки Челябинской области

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

«Троицкий технологический техникум»

Методические указания
по выполнению практических работ

по учебной дисциплине: ЕН.01 Математика

по специальности: 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений

Троицк, 2023г.

Методические указания для выполнения практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины ЕН.01 Математика по специальности: 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений

Организация-разработчик: ГБПОУ «Троицкий технологический техникум».

Разработчик: О.В. Орлова, преподаватель математики высшей квалификационной категории.

Рассмотрена на заседании цикловой методической комиссии преподавателей общеобразовательных дисциплин, ОГСЭ и ЕН циклов

Протокол № 9 от «26» мая 2023 г.

Содержание:

1. Пояснительная записка

Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика» предназначена для студентов второго курса по специальности 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений.

Практические работы служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же для получения практических знаний.

Практические задания выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания. К практическому занятию от студента требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием. Список литературы и вопросы, необходимые при подготовке, студент получает перед занятием из методических рекомендаций.

Практические задания разработаны в соответствии с рабочей программой. В зависимости от содержания они могут выполняться студентами индивидуально или фронтально.

В соответствии с учебным планом на практические занятия отводится – 24ч.

Учебные и воспитательные цели практических занятий.

В рамках традиционного подхода:

1) актуализировать знания студентов из курса математики по теме занятия;

2) создать условия для развития творческой активности, самостоятельности и критичности мышления, умения работать в коллективе.

В рамках компетентностного подхода:

1) содействовать развитию у студентов общенаучных компетенций (аналитико-синтетической, прогностической, проектировочной);

2) создать условия для развития коммуникативной, адаптивной и информационной компетенций.

2. Общие требования по выполнению работы и оформлению отчета; критерии оценивания работ.

После изучения соответствующей темы студенты выполняют практическую работу. Содержание практических работ полностью соответствует рабочей программе по математике.

К выполнению практической работы можно приступать только после изучения соответствующей темы и получения навыков решения задач. Предусмотренные задания носят репродуктивный, частично-поисковый и поисковый характер. Все задачи и расчеты обязательно должны быть доведены до окончательного числового результата. После выполнения работы обучающийся должен представить отчет о проделанной работе с обсуждением полученных результатов.

Все практические работы, сдаваемые обучающимися на проверку, должны быть выполнены в обычной тетради в клетку.

При выполнении практической работы студентам рекомендуется:

- использовать учебные пособия, справочники;
- проводить несложные дедуктивные рассуждения;
- обосновывать шаги решения задач;
- формулировать определения математических понятий;
- пользоваться математической терминологией и символикой;
- письменно оформлять решения задач;
- пользоваться калькулятором;
- самостоятельно изучать учебный материал.

Практическая работа выполняется в сроки, установленные в соответствии с календарно-тематическим планом. За каждую практическую работу студент должен получить положительную оценку.

Итоговой формой изучения дисциплины является зачет. Студенты, не выполнившие все практические работы, не аттестуются и к зачету не допускаются.

Критерии оценки практических работ

Оценка «5» – работа выполнена в полном объеме и без замечаний.

Оценка «4» – работа выполнена правильно с учетом 2-3 несущественных ошибок исправленных самостоятельно по требованию преподавателя.

Оценка «3» – работа выполнена правильно не менее чем на половину или допущена существенная ошибка.

Оценка «2» – допущены две (и более) существенные ошибки в ходе работы, которые обучающиеся не может исправить даже по требованию преподавателя или работа не выполнена.

3. Тематика и содержание практических работ учебной дисциплины ЕН.01 «Математика»

Наименование тем	Практические работы	Колич часов
1	2	3
Раздел 1 **Элементы аналитической геометрии**		**6**
Тема 1 Векторы	Практическая работа №1. «Вычисление скалярного произведения векторов, угла между векторами. Определение расстояния между точками и координат середины отрезка».	2
	Практическая работа №2 «Применение векторов для решения геометрических и практических задач»	2
Тема 2 Уравнения прямых на плоскости и в пространстве.	Практическая работа №3. «Определение взаимного расположения прямых и угла между ними, расстояния от точки до прямой».	2
Раздел 2 **Вычисление площадей и объёмов**		**4**
Тема 4 Площади плоских фигур и поверхностей тел	Практическая работа №4. «Расчет площадей строительных конструкций»	2
Тема 5 Объёмы тел	Практическая работа №5 «Вычисление объёмов деталей строительных конструкций, определение объема земляных работ».	2
Раздел 3 **Дифференциальное и интегральное исчисление**		**10**
Тема 6 Пределы последовательностей и функций	Практическая работа №6. «Вычисление пределов функций».	2

Тема 7 Вычисление и применение производной	Практическая работа № 7. «Составление уравнения касательной и нормали, вычисление наибольшего и наименьшего значений функции».	2
	Практическая работа №8. «Применение производной к исследованию функции и для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах».	2
Тема 8 Неопределенный интеграл	Практическая работа №9. «Вычисление неопределённых интегралов методом замены переменных и с помощью интегрирования по частям».	2
Тема 9 Определенный интеграл. Вычисление площадей плоских фигур	Практическая работа №10. «Построение криволинейной трапеции. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и вычислению объёмов».	2
Раздел 4 **Основы теории вероятностей и математической статистики**		**4**
Тема 10 Вероятность. Основные теоремы теории вероятностей	Практическая работа. №11. «Вычисление вероятностей сложных событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности и формула Бернулли».	2
Тема 11 Основы математической статистики	Практическая работа №12. «Составление статистического распределения выборки, построение полигона и гистограммы».	2

Практическая работа № 1

Тема: Вычисление скалярного произведения векторов, модуля вектора и угла между векторами. Определение расстояния между точками и координат середины отрезка.

Цель работы: сформировать умения выполнять действия над векторами в координатной форме.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Задание:

1. Найти координаты векторов $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$.
2. Найти длины векторов $|\vec{AB}|$, $|\vec{BC}|$, $|\vec{CA}|$.
3. Найти периметр треугольника ΔABC.
4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$.
5. Найти косинус угла B ($\cos B$)
6. Найти координаты точки М – середины отрезка $|BC|$
7. Найти длину медианы $|\vec{AM}|$

Вариант	Координаты вершин треугольника АВС
1	A(2;3;1) B(4;-1;0) C(-2;-2;0)
2	A(3;2;0) B(3;-3;1) C(-2;-1;0)

3	A(3;4;1) B(1;-1;1) C(-4;4;1)
4	A(2;4;0) B(4;-3;0) C(-2;-4;1)

Контрольные вопросы:

1. Как найти координаты вектора, заданного началом и концом?
2. Как найти длину вектора?
3. Как найти скалярное произведение векторов?
4. Как найти угол между векторами?
5. Как найти координаты середины отрезка?

Практическая работа №2

Тема: Применение векторов для решения геометрических и практических задач.

Цель работы: формировать умения использовать вектора для решения задач.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Задание:

Вариант 1

Даны координаты вершин пирамиды $A_1(1;1;1)$, $A_2(2;3;4)$, $A_3(6;2;3)$, A4(4;3;2)

Найдите:

1) длину ребра A_1A_3
2) угол между ребрами A_1A_3 и A_1A_4
3) угол между ребром A_1A_3 и гранью $A_1A_2A_4$
4) площадь грани $A_1A_2A_4$
5) объем пирамиды

Вариант 2

Даны координаты вершин пирамиды $A_1(0;0;1)$, $A_2(2;3;5)$, $A_3(6;2;3)$, A4(3;7;2)

Найдите:

6) длину ребра A_1A_3
7) угол между ребрами A_1A_3 и A_1A_4
8) угол между ребром A_1A_3 и гранью $A_1A_2A_4$
9) площадь грани $A_1A_2A_4$
10) объем пирамиды

Контрольные вопросы:

1. Как найти дину вектора?
2. Как найти угол между векторами?

3. Как найти векторное произведение векторов?
4. Как найти смешанное произведение векторов?

Практическая работа №3

Тема: Определение взаимного расположения прямых и угла между ними, расстояния от точки до прямой.

Цель работы: формировать умения определять угол между прямыми, взаимное расположение прямых.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Задача 1

Найти угол между прямыми $2x - 3y + 5 = 0$; $x + 2y + 2 = 0$

Решение: имеем: из первого уравнения

$$2x - 3y + 5 = 0$$

$$3y = 2x + 5$$

$$y = \frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3};\ k_1 = \frac{2}{3}$$

из второго уравнения

$$x + 2y + 2 = 0 \qquad ; \qquad 2y = -x - 2$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 1;\ k_2 = -\frac{1}{2};\text{ тогда}$$

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \frac{\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{7}{4}$$

$$\text{Откуда } \varphi = arctg\,\frac{7}{4} \approx 60°$$

Задача 2

Найти точки пересечения прямых

$$2x + 3y - 13 = 0 \quad \text{и} \quad 3x + 2y - 12 = 0$$

Решение

Задача сводится к решению системы:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 13 = 0 \\ 3x + 2y - 12 = 0 \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 3, второе на -2, сложив оба уравнения, получим:

$$\begin{cases} 6x + 9y - 39 = 0 \\ -6x - 4y + 24 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{5y - 15 = 0}$$

откуда $y = 3$

Подставив $y = 3$ в любое уравнение, получим $\text{x} = 2$

Следовательно, прямые пересекаются в точке (2;3)

Задача 3

Докажите, что прямые

$6x - 15y + 7 = 0$ и $10x + 4y - 1 = 0$ перпендикулярны.

Решение:

$$6x - 15y + 7 = 0$$

$$15y = 6\text{x} + 7$$

$$y = \frac{6}{15}\text{x} + \frac{7}{15}$$

$$y = \frac{2}{5}\text{x} + \frac{7}{15}; \qquad k_1 = \frac{2}{5}$$

$$10x + 4y - 1 = 0$$

$$4y = -10x + 1$$

$$y = -\frac{10}{4}x + \frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{4}; \quad k_2 = -\frac{5}{2}$$

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -1$$

Следовательно, прямые перпендикулярны.

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Вычислите угол между прямыми:

а) $y = -2\text{x} + 5$ и $y = 3\text{x} + 4$

б) $2x + y - 5 = 0$ и $3x - y + 4 = 0$

2. Найдите точку пересечения прямых:

$3x - 2y - 5 = 0$ и $5x + y - 17 = 0$

3. Среди следующих пар прямых укажите пары параллельных или перпендикулярных прямых:

а) $2x - 3y - 7 = 0$ и $4x - 6y + 9 = 0$

б) $7x - 2y + 14 = 0$ и $2x + 7y - 20 = 0$

Вариант 2

1. Вычислите угол между прямыми:

а) $y = \sqrt{3}\text{x} + 7$ и $y = -\sqrt{3}\text{x} - 2$

б) $x + 5y + 9 = 0$ и $22x - 3y + 1 = 0$

2. Найдите точку пересечения прямых:

$4x - 3y - 7 = 0$ и $2x + 3y - 17 = 0$

3. Среди следующих пар прямых укажите пары параллельных или перпендикулярных прямых:

а) $33x + 2y - 5 = 0$ и $4x - 6y + 9 = 0$

б) $2x - 3y - 21 = 0$ и $3y = 2x - 24$

Контрольные вопросы:

1. Виды уравнений прямой на плоскости
2. Вычисление угла между прямыми
3. Условие параллельности прямых
4. Условие перпендикулярности прямых

Практическая работа №4.

Тема: Расчет площадей строительных конструкций.

Цель работы: формировать умения вычислять площади.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Образец решения.

Пример

Дом имеет форму цилиндра.

Рассчитать площадь под оштукатуривание наружных стен дома.

Размеры дома: диаметр - 10 м, высота - 3 м.

Размеры двери – 2м*0,9 м (2 шт)

Размеры прямоугольных окон – 1м*0,8м (12 шт)

Размеры круглых окон – радиус 0,4м (2шт)

Решение:

Пусть S – площадь оштукатуривания.

$S_{бок}$ - площадь боковой поверхности дома

S_1 –площадь дверей;

S_2 –площадь прямоугольных окон;

S_3 –площадь круглых окон;

$$S = S_{бок} - S_1 - S_2 - S_3;$$

$$S_{бок} = 2\pi RH; \qquad R = 5м; \;\; H = 3м;$$

$$S_{бок} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 3 = 94{,}2м^2$$

$$S_1 = (2 \cdot 0{,}9) \cdot 2 = 3{,}6м^2$$

$$S_2 = (1 \cdot 0{,}8) \cdot 12 = 9{,}6м^2$$

$$S_3 = (\pi R^2) \cdot 2 = (3{,}14 \cdot 0{,}4^2) \cdot 2 = 1{,}0048м^2$$

$$S = 94{,}2 - 3{,}6 - 9{,}9 - 1{,}0048 = 79{,}9952 \approx 80м^2$$

Ответ: $S = 80м^2$

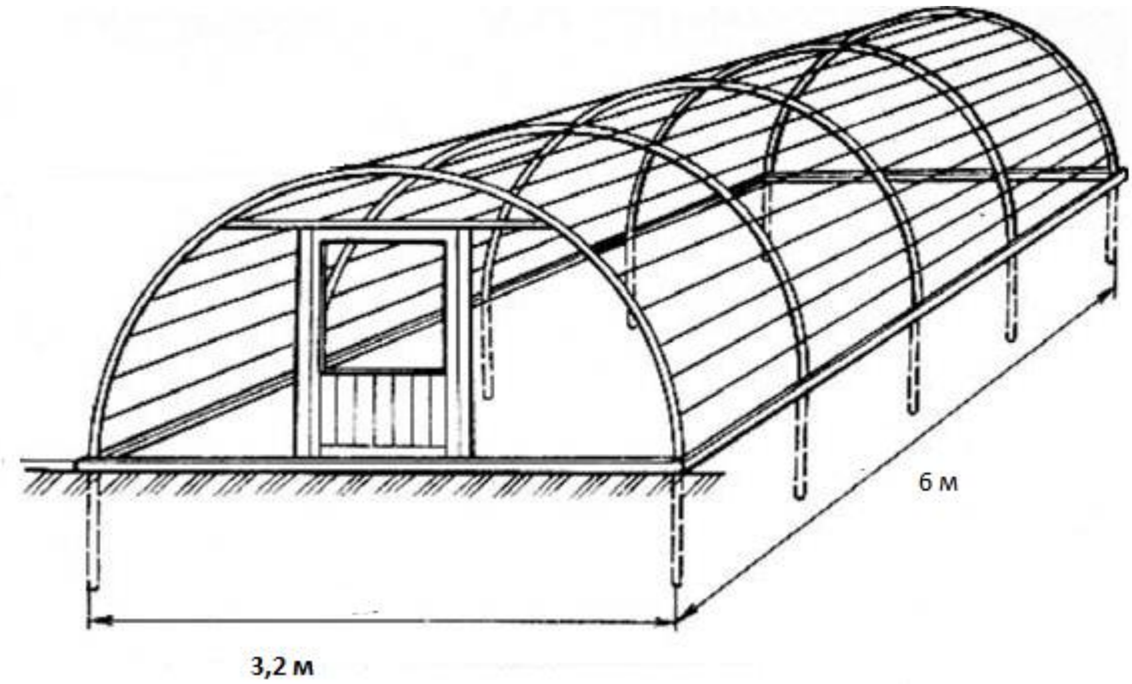
Задание для самостоятельного решения:

Вариант 1

Дом имеет форму усечённого конуса.
Рассчитать площадь под оштукатуривание наружных стен дома.
Размеры дома: диаметры - 8 м и 6 м, образующая - 6 м.
Размеры двери – 2м*1 м
Размеры окон – 1,2м*0,87м (10 шт)

Вариант 2

Теплица имеет форму полуцилиндра с диаметром 3,2м и длиной 6 м. Сколько листов поликарбоната размером 2,1м*6м нужно для изготовления теплицы (отходы компенсируются размером двери).



Вариант 3

Навес имеет форму полуцилиндра с диаметром 10м и длиной 20м.
Сколько листов поликарбоната размером 2,1м*12м нужно для изготовления навеса, если отходы составляют 5%. (поликарбонат используется только на боковую поверхность).

Вариант 4

Крыша дома имеет форму конуса с диаметром 4м и образующей 3,5м. Какое количество черепицы, в форме прямоугольника размером 0,15м*0,1м необходимо для покрытия крыши, если дополнительные расходы составляют10%.

Контрольные вопросы:

1. Формулы для вычисления плоских фигур.
2. Формулы для вычисления площадей поверхностей многогранников.
3. Формулы для вычисления площадей поверхностей тел вращения.

Практическая работа №5

Тема: Вычисление объёмов деталей строительных конструкций, определение объема земляных работ.

Цель работы: - формировать умения вычислять объемы.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Образец решения.

Пример

Здание имеет форму прямоугольного параллелепипеда: длина 26 метра, ширина 8 метров и высота 7 метров.

Сколько необходимо затратить кирпича на строительство, если кладка выполнялась в два кирпича и предусмотрено 4 оконных простенка (1500х1700) и дверной проем(1500х2400). Размер кирпича 250х120х65мм.

Решение:

Толщина стены здания составляет 250*2=500мм=0,5м

$$V_{здания} = 26 \cdot 7 \cdot 8 = 1456 м^3$$

$$V_{здания\ внутри} = 25 \cdot 7 \cdot 7 = 1225 м^3$$

$$V_{стен} = 1456 - 1225 = 231 м^3$$

$$V_{окон} = 4 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}7 \cdot 0{,}5 = 5{,}1 м^3$$

$$V_{двери} = 1{,}5 \cdot 2{,}4 \cdot 0{,}5 = 1{,}8 м^3$$

$$V_{кирпича\ всего} = 231 - 5{,}1 - 1{,}8 = 224{,}1 м^3$$

$$V_{одного\ кирпича} = 0{,}25 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}065 = 0{,}00195 м^3$$

$$n_{кирпича} = 224{,}1 : 0{,}00195 \approx 114924\ шт$$

Ответ: $n_{кирпича} \approx 114924\ шт$

Задание для самостоятельного решения.

Вариант 1

1).Построена осушительная канава длиной 800 м, поперечное сечение которой имеет вид трапеции с основаниями 3 и 5 м и высотой 2,5 м. Какой объем земляных работ был произведен при постройке этой канавы? Сколько рабочих дней потребовалось для выполнения работ, если производительность строительных машин составляет 48 м^3 в час (рабочий день – 8ч)?

2). Найдите вместимость сарая прямоугольной формы с двускатной крышей и прямым углом между стропилами. Размеры сарая: длина- 10 м., ширина 7 м., высота стен до крыши 3,5 м., высота от основания до конька крыши 6,5 м.

Вариант 2

1). Под водоем необходимо вырыть котлован в форме правильной усеченной пирамиды, верхнее и нижнее основания которой - квадраты со сторонами 40 и 28 м, а глубина водоема равна 2 м Сколько рабочих дней потребуется на выполнение работ, если производительность строительных машин составляет 12 м3 в час.

2). Сколько кирпича и раствора требуется для постройки стены длиной 20 м, толщиной 50 см и высотой 2,5 м, если на 1 м^3 кладки расходуется 400 кирпичей, а расход раствора составляет 20% объема кладки?

Контрольные вопросы:

1. Формулы для вычисления объемов многогранников.
2. Формулы для вычисления объемов тел вращения

Практическая работа №6

Тема: Вычисление пределов функций.

Цель работы: формирование навыков вычисления пределов функций.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Определение Число А называется **пределом функции** ***y=f(x)*** при *x*, стремящемся к *a*, если для любой последовательности чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, .x_n, \ldots$ сходящейся к числу *a*, следует, что последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) \ldots$ сходится к числу А.

Предел функции в точке *a* обозначается

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Основные теоремы о пределах

1. $\lim_{x \to a} C = C$

2. $\lim_{x \to a} x = a$

3. $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

4. $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

5. $\lim_{x \to a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^n$

6. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

Техника вычисления пределов

При вычислении предела элементарной функции *f(x)* приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

- Функция $f(x)$ определена в предельной точке $x = a$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

- Функция $f(x)$ в предельной точке $x = a$ не определена или же вычисляется предел функции при $x\to\infty$. Тогда вычисление предела требует в каждом случае индивидуального подхода.

Необходимо помнить, что
$\frac{C}{\infty}=0$, $\frac{\infty}{C}=\infty$, $\infty+C=\infty$, $\frac{0}{C}=0$, $\frac{C}{0}=\infty$, $0+C=C$.

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда функция $f(x)$ в точке $x = a$ или при $x\to\infty$ представляет собой неопределенность (типа $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$).

При вычислении пределов при $x\to\infty$ основные теоремы о пределах сохраняют силу и, кроме того, используются правила:

а) чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$, необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на наибольшую степень переменной;

б) чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{0}{0}$, необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на наименьшую степень переменной ;

в) чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{0}{0}$, иногда достаточно числить и знаменатель дроби разложить на множители и затем сократить дробь на множитель, приводящий к неопределенности;

г) чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{0}{0}$, зависящую от иррациональности, достаточно перевести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и сократить на множитель, приводящий к неопределенности;

д) чтобы раскрыть неопределенность типа $\infty-\infty$, необходимо числитель и знаменатель дроби одновременно умножить на сопряженное выражение и тем самым свести к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$.

Вычислить пределы функций:

Пример 1: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2}{x^3-1}=\frac{2\cdot 2^2}{2^3-1}=\frac{8}{7}$

Пример 2: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5}{x-1}=\frac{5}{1-1}=\left(\frac{5}{0}\right)=\infty$

Пример 3: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x+4}{1+3x^2-x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+4}{\frac{1}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}-\frac{x^3}{x^3}}=$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5 - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x} - 1} = \frac{5 - \frac{2}{\infty} + \frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + \frac{3}{\infty} - 1} = \frac{5-0+0}{0+0-1} = -5$$

Пример 4: $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-2)(x-1)}{-(x-1)(x+1)} =$

$$= \left| \begin{array}{c} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ D = 3^2 - 4\cdot 2 = 1 \\ x_1 = \frac{3+1}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{3-1}{2} = 1 \end{array} \right| = \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{-x-1} = \frac{1-2}{-1-1} = \frac{-1}{-2} = 0{,}5$$

Пример5: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-x} - 2}{3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{4-x} - 2)(\sqrt{4-x} + 2)}{3x(\sqrt{4-x} + 2)} =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{4-x-4}{3x(\sqrt{4-x}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{3x(\sqrt{4-x}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{3\cdot(\sqrt{4-x}+2)} = -\frac{1}{12}$$

Пример 6:

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 25}{2 - \sqrt{x-1}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 5} \frac{(x^2-25)(2+\sqrt{x-1})}{(2-\sqrt{x-1})(2+\sqrt{x-1})} = \lim_{x\to 5} \frac{(x^2-25)(2+\sqrt{x-1})}{4-(x-1)} =$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+5)(2+\sqrt{x-1})}{-(x-5)} = -\lim_{x\to 5} (x+5)(2+\sqrt{x-1}) = -10\cdot 4 = -40.$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 25}{2 - \sqrt{x-1}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 5} \frac{(x^2-25)(2+\sqrt{x-1})}{(2-\sqrt{x-1})(2+\sqrt{x-1})} = \lim_{x\to 5} \frac{(x^2-25)(2+\sqrt{x-1})}{4-(x-1)} =$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+5)(2+\sqrt{x-1})}{-(x-5)} = -\lim_{x\to 5} (x+5)(2+\sqrt{x-1}) = -10\cdot 4 = -40.$$

Задание для самостоятельного решения:

1 – Вариант

Вычислите пределы:

1. $\lim_{x\to -2} (4x^5 - 50x)$

2. $\lim_{x\to -8} \frac{64 - x^2}{x + 8}$

3. $\lim_{x\to -5} \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{-3x+2x^3}{x^2+5x}$$

5. $$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$$

2 – Вариант

Вычислите пределы:

1. $$\lim_{x\to -2}(2x^4-20)$$

2. $$\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x+5}$$

3. $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x-3}$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{7x^4+3x^2}{-x^2+8x^3}$$

5. $$\lim_{x\to 25}\frac{25-x}{\sqrt{x}-5}$$

3 – Вариант

Вычислите пределы:

1. $$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x-3}{2x-1}$$

2. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x+1}$$

3. $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{3x+2x^2}$$

5. $$\lim_{x\to 16}\frac{16-x}{\sqrt{x}-4}$$

4 – Вариант

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-3x^2}{2x^2+5}$
2. $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{49-x^2}{x+7}$
3. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+4x-5}{x+5}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+3x^2}{2x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение предела функции в точке.
2. Сформулируйте основные свойства пределов.
3. Как раскрывается неопределенность вида $0/0$, ∞/∞?

Практическая работа №7

Тема: Составление уравнения касательной и нормали, вычисление наибольшего и наименьшего значений функции.

Цель работы: - формирование навыков использования производной для решения прикладных задач.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Определение: **Производной функции** $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения ее приращения $\Delta f(x)$ к приращению Δx аргумента x, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Если этот предел конечный, то функция *y=f(x)* называется **дифференцируемой** в точке *x*. Если же этот предел есть ∞, то говорят, что функция *y=f(x)* имеет в точке *x* бесконечную производную.

Механический смысл производной: скорость есть первая производная пути по времени, т.е. $v = S'(t)$, ускорение есть вторая производная пути по времени, т.е. $a = S''(t)$

Геометрический смысл производной: тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ равен первой производной этой функции , вычисленной в точке касания, т.е. $tg\alpha = f'(x)$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$y = f(x\ ) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Таблица производных

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$(u + v - w)' = u' + v' - w'$

$(C \cdot u)' = C \cdot u'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(C)' = 0$

$(x)' = 1$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$\left(e^x\right)' = e^x$

$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\sin x)' = \cos x$

$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(arcctgx)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

Задание для самостоятельного решения:

ВАРИАНТ 1

1. Найти скорость и ускорение в указанный момент времени для точки, движущейся прямолинейно, если движение точки задано уравнением: $s = t^3 + 5t^2 + 4, \ t = 2$
2. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y = x + 3x^2$ в точке с абсциссой $x_o=-1$
3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ на отрезке [-4;3]

ВАРИАНТ 2

1. Найти скорость и ускорение в указанный момент времени для точки, движущейся прямолинейно, если движение точки задано уравнением:

$$s = 4t^3 + t^2 - 14,\ \ t = 2$$

2. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y = x^2 - 2$ в точке с абсциссой $x_o = 2$.
3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3$ на отрезке $[-2;2]$

ВАРИАНТ 3

1. Найти скорость и ускорение в указанный момент времени для точки, движущейся прямолинейно, если движение точки задано уравнением:

$$s = t^2 + 11t + 30,\ \ t = 3$$

2. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y = -x^2 + 1$ в точке с абсциссой $x_o = 2$.
3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ на отрезке [-3;2]

ВАРИАНТ 4

1. Найти скорость и ускорение в указанный момент времени для точки, движущейся прямолинейно, если движение точки задано уравнением:

$$s = 2t^3 + t^2 - 4,\ \ t = 4$$

2. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y = 2 + x^2$ в точке с абсциссой $x_o=-1$
3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3$ на отрезке [-2;3]

Контрольные вопросы:

1. Механический смысл производной
2. Геометрический смысл производной
3. Уравнение касательной
4. Уравнение нормали

Практическая работа №8

Тема: Применение производной к исследованию функции и для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах.

Цель работы: закрепить навыки исследования функции и построение графика с помощью производной.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники, линейка, карандаш.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Определение производной функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, и существует конечный предел отношения $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$. Тогда этот предел называется производной функции в точке x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

Производная функции $y = f(x)$ может также обозначаться одним из следующих способов: $f'_x(x_0), y'(x_0), \frac{df}{dx}$.

1. ***Формулы дифференцирования основных функций:***

1. $(x^m)' = m \cdot x^{m-1} \cdot x' = m \cdot x^{m-1}.$

2. $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{1-\frac{1}{2}} \cdot x' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} \cdot x' = -\frac{1}{x^2}.$

4. $\left(e^x\right)' = e^x \cdot x' = e^x.$

5. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a \cdot x' = a^x \ln a.$

6. $(\ln x)' = \frac{1}{x} \cdot x' = \frac{1}{x}.$

7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \cdot x' = \frac{1}{x \ln a}.$

8. $(\sin x)' = \cos x \cdot x' = \cos x.$

9. $(\cos x)' = -\sin x \cdot x' = -\sin x.$

10. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot x' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$

11. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot x' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\mathrm{cosec}^2 x.$

12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

2. ***Основные правила дифференцирования***

Пусть $C - const, U = U(x), V = V(x)$, тогда:

1) $C' = 0;$

2) $x' = 1;$

3) $(U \pm V)' = U' \pm V';$

4) $(C \cdot U)' = C \cdot U';$

5) $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V';$

6) $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}.$

7) Если $y = f(U), U = U(x)$, то есть $y = f[U(x)]$, где $f(U)$ и $U(x)$ имеют производные, то $y'_x = y'_u \cdot U'_x$ (правило дифференцирования сложной функции).

Схема исследования функции

1. Найти области определения функции .

2. Вычислить координаты точек пересечения графика с осями координат.
3. Выяснить, на каких промежутках функция возрастает, а на каких убывает.
4. Найти точки экстремума (максимум или минимум), и вычислить значения в этих точках.
5. Построить график функции.

Пример на исследование функции:

Исследуем функцию: $f(x)= 3x^5-5x^3+2$и построим ее график.

Проведем исследование по указанной схеме:

1.D (f) =R, так как f (x) - многочлен.

2.Найдем координаты точек пересечения графика с осями координат:

а) с осью 0Х, для этого решим уравнение: $3x^5-5x^3+2 = 0$.

Методом подбора можно найти один из корней (x = 1).Другие корни могут быть найдены только приближенно.

б) с осью 0У: f(0)=2

Точка (0; 2) - точка пересечения графика функции с осью 0У.

3.Найдем промежутки возрастания и убывания функции

а) $f'(x)= 15x^4 -15x^2 = 15x^2 (x^2-1)$

D (f ') =R, поэтому критических точек которых f '(x)не существует, нет.

б) $f'(x) = 0$, если $x^2(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x = -1, x = 0, x = 1$.

в) Получим три критические точки, они разбивают координатную прямую на четыре промежутка. Определим знак производной на этих промежутках:

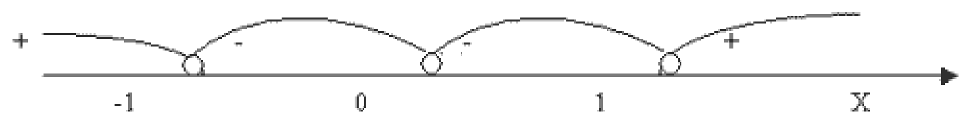


Рис.1 (знаки f ')

Из рисунка 1 видно, что: f возрастает на интервалах (-∞; -1) и(1; +∞);

f убывает на (-1 ; 0) и (0; 1).

Так как функция непрерывна в точках -1; 0; 1, то f возрастает на (-∞; -1] и [1; +∞);

f убывает на [-1; 0] и [0; 1].

4.Найдем точки экстремума функции и вычислим значения функции в этих точках. Рассматривая рисунок 1 знаков f' видим, что:

x =-1 - точка max, f (-1) =4;

x = 1 - точка min, f (1) =0.

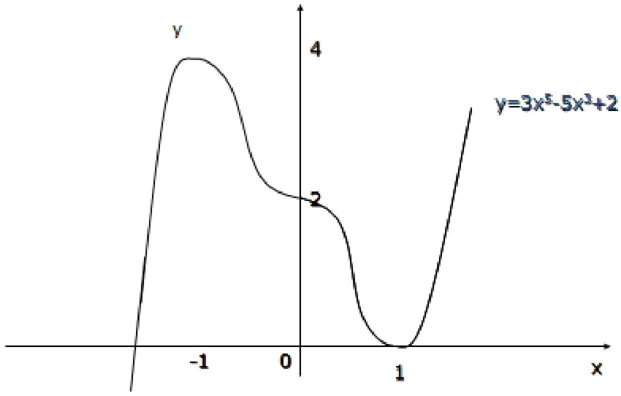
Полученные результаты занесем в таблицу

$f(x)= 3x^5-5x^3+2$

x	(-∞; -1)	-1	(-1; 0)	0	(0; 1)	1	(1; ∞)
f´(x)	+	0	-	0	-	0	+
f(x)	↑	4	↓		↓	2	↑
		max				min	

5. Построим график:

График функции f(x)= $3x^5$-$5x^3$+2



Задание для самостоятельного решения:

ВАРИАНТ 1

Исследовать функцию и построить график

$$f(x)=2+3x-x^3$$

ВАРИАНТ 2

Исследовать функцию и построить график

$$f(x)=-x^3+4x^2-4x$$

ВАРИАНТ 3

Исследовать функцию и построить график

$$f(x)=x^3+6x^2+9x$$

ВАРИАНТ 4

Исследовать функцию и построить график

$$f(x)=-x^4+8x^2-16$$

ВАРИАНТ 5

Исследовать функцию и построить график

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$$

ВАРИАНТ 6

Исследовать функцию и построить график

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$$

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте с и поясните схему исследования функции.

Практическая работа №9

Тема: Вычисление неопределённых интегралов методом замены переменных и с помощью интегрирования по частям

Цель:- овладение методикой вычисления неопределенных интегралов методом замены переменной и по частям.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Определение: Функция *F(x)* называется **первообразной для функции *f(x)*,** если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Любая непрерывная функция *f(x)* имеет бесконечное множество первообразных, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

Определение: Совокупность *F(x)+C* всех первообразных для функции *f(x)* называется **неопределенным интегралом** от этой функции и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; 2. $\int f'(x)dx = f(x) + C$;

3. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$; 4. $\int d(f(x)) = f(x) + C$;

5. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$; 6. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование предполагает использование при нахождении неопределенных интегралов таблицы интегралов

Таблица интегралов

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2} \cdot \ln\left|a^2 \pm x^2\right| + C$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + C$$

$$\int a^{kx+b} dx = \frac{a^{kx+b}}{k \cdot \ln a} + C$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C$$

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \cdot \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Метод подстановки в неопределенном интеграле (метод замены переменной)

Этот метод заключается в том, что заменяют переменную x на $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция, полагают $dx = \varphi'(t)dt$ и получают

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

При этом получают искомую функцию, выраженную через переменную t. Для возвращения к переменной x необходимо заменить t значением $t = \psi(x)$, которое находится из соотношения $x = \varphi(t)$.

Рассмотрим нахождение интегралов методом подстановки.

Пример 1: Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$

Решение: $\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = \begin{vmatrix} \ln x = t; \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C =$

$$= -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$$

Пример 2: Найти неопределенный интеграл $\int ctgx\,dx$

Решение: $\int ctgx\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \begin{vmatrix} \sin x = t; \\ dt = \cos dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$

$= \ln|\sin x| + C$

Пример 3: Найти неопределенный интеграл $\int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x}$

Решение: $\int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x} = \begin{vmatrix} e^x = t \\ dt = e^x dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = tgt + C = tge^x + C$

Пример 4: Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{4+25x^2}$

Решение: $\int \frac{dx}{4+25x^2} = \int \frac{dx}{2^2+(5x)^2} = \begin{vmatrix} 5x = t \\ dt = 5dx \\ dx = \frac{1}{5}dt \end{vmatrix} = \int \frac{\frac{1}{5}dt}{2^2+t^2} =$

$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + C = \frac{1}{10}arctg\frac{5x}{2} + C$.

Задание для самостоятельной работы.

1 – Вариант

Найти неопределенный интеграл методом подстановки:

1. $\int \frac{3x\,dx}{(x^2+9)^2}$

2. $\int 4\cdot e^{8x^2}\cdot x\,dx$

Найти неопределенный интеграл методом «интегрирование по частям»:

$$\int x^2 \sin x\,dx$$

2 – Вариант

Найти неопределенный интеграл методом подстановки:

1. $\int 0{,}5\cdot e^{3x^2}\cdot x\,dx$

2. $\int \frac{5x\,dx}{(x^2-2)^3}$

Найти неопределенный интеграл методом «интегрирование по частям»:

$$\int x\cos x\,dx$$

3 – Вариант

Найти неопределенный интеграл методом подстановки:

1. $\int\left(\frac{3}{x-3}\right)dx$
2. $\int\sqrt{x^2+3}\;xdx$

Найти неопределенный интеграл методом «интегрирование по частям»:

$$\int x\ln x dx$$

4 – Вариант

Найти неопределенный интеграл методом подстановки:

1. $\int 6\sqrt{x^2+1}\;\text{x}dx$

2. $\int\left(\frac{4}{x-1}\right)dx$

Найти неопределенный интеграл методом «интегрирование по частям»:

$$\int\left(4x^3+6x-7\right)\ln x dx$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение неопределенного интеграла.
2. Перечислите свойства неопределенного интеграла.
3. Таблица основных интегралов.
4. Интегрирование методом подстановки.
5. Метод интегрирования по частям.

Практическая работа №10.

Тема: Построение криволинейной трапеции. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и вычислению объёмов.

Цель: закрепить навыки вычисления площадей плоских фигур и объема тела вращения с помощью определённого интеграла**.**

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники, линейка, карандаш.

Порядок выполнения работы:

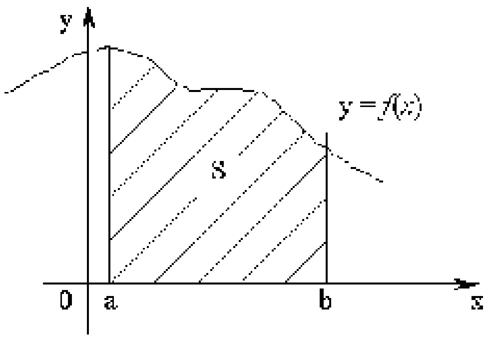
1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Определение. Разность F (b)– F (a) называется интегралом от функции f (x) на отрезке [a ; b] и обозначается так: $\int_a^b f(x)dx$, т.е. $\int_a^b f(x)dx$ = F (b)– F (a) – формула Ньютона-Лейбница.

Вычисление площадей плоских фигур.

Геометрический смысл интеграла.



Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке [a ; b] функции f (x), осью Ox и прямыми x=a и x= b:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(a) - F(b)$$

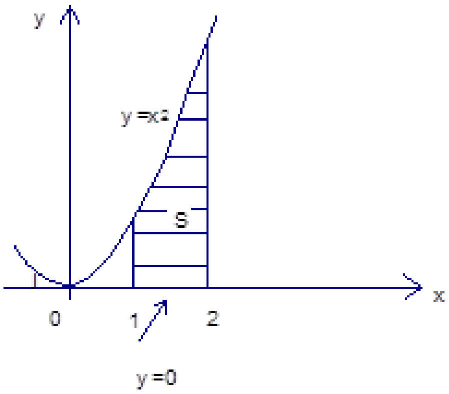
.

Пример 1.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 2.$

Решение.

Искомая площадь:



Формула:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Это общая формула. Конкретно к нашему случаю она применима так:

Пределы интегрирования $a = 1, b = 2, f(x) = x^2$.

$S = \int_1^2 x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}$(кв. ед.)(

Ответ: $\frac{7}{3}$

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [a,b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx.$$

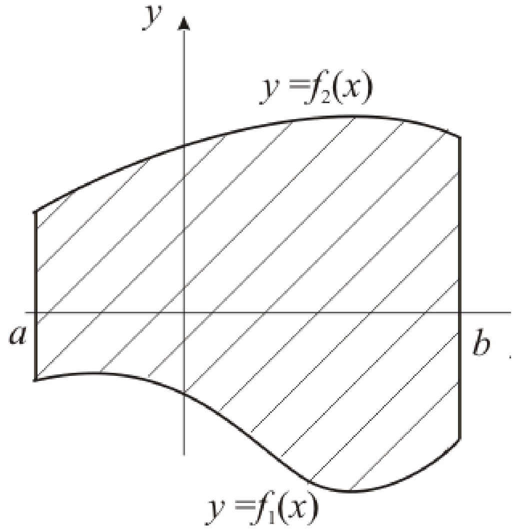


Рис. 1

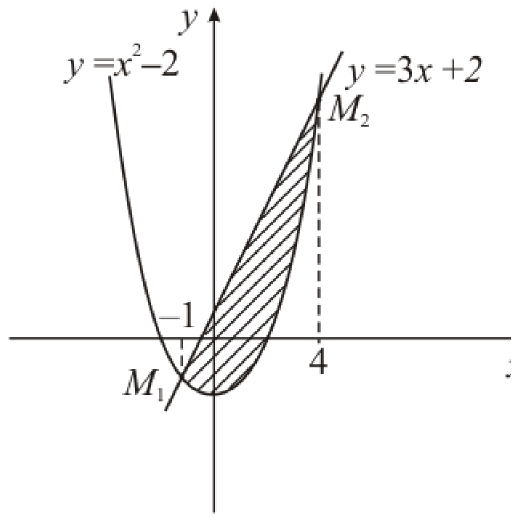


Рис. 2

Приме 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2 - 2, \ y = 3x + 2.$

*Решение***.** Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
y	–2	–1	–1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0,\ 2)$ и $(-1, -1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \ \ x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1, \ \ y_2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14.$

Итак, $M_1(-1,-1), \ \ M_2(4,14).$

Площадь полученной фигуры найдем по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx.$$, в которой

$f_2(x) = 3x + 2, \ \ f_1(x) = x^2 - 2,$

поскольку $f_2(x) \ge f_1(x)$ для всех $x \in [-1, 4]$.

Получим:

$$S=\int_{-1}^{4}\left(3x+2-\left(x^2-2\right)\right)dx=\int_{-1}^{4}\left(3x-x^2+4\right)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Bigg|_{-1}^{4}=$$

$$=\frac{3\cdot 4^2}{2}-\frac{4^3}{3}+4\cdot 4-\left(\frac{3\cdot(-1)^2}{2}-\frac{(-1)^3}{3}+4\cdot(-1)\right)=24-\frac{64}{3}+16-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+4=$$

$$=44-\frac{65}{3}-\frac{3}{2}=\frac{125}{6}=20\frac{5}{6}\ (\text{кв.ед.})$$

Вычисление объемов тел вращения.

Если тело образовано вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью OX и прямыми $x=a$, $x=b$ (рис.3), то его объем вычисляется по формуле:

$$V=\pi\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx.$$

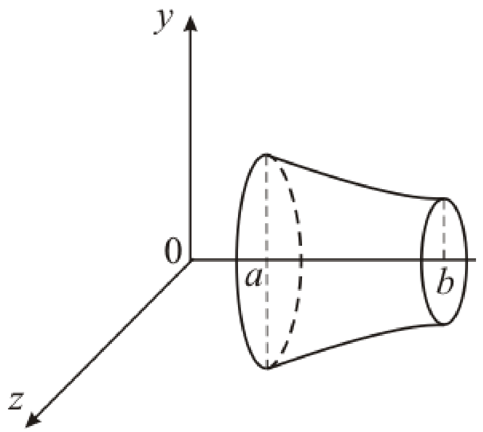


Рис. 3

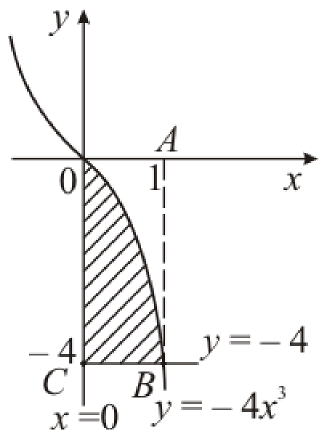


Рис. 4

Пример. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y=-4x^3$, $x=0$, $y=-4$.

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 4).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры $OABC$, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры OAB. Тогда искомый объем $V=V_1-V_2$. По формуле

$$V=\pi\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx.$$

найдем V_1 и V_2: $V_1=\pi\int_0^1(-4)^2dx=\pi 16x\Big|_0^1=16\pi$ (ед. объема);

$$V_2 = \pi\int_0^1 \left(-4x^3\right)^2 dx = 16\pi\int_0^1 x^6 dx = 16\pi\frac{x^7}{7} = \frac{16\pi}{7} \text{ (ед. объема);}$$

$$V = V_1 - V_2 = 16\pi - \frac{16\pi}{7} = \frac{96}{7}\pi \approx 43,085 \text{ (ед. объема).}$$

Задание для самостоятельного решения:

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1. $y = x^3, y = 0, x = -2, x = 0$
2. $y = x^2, y = 0, x = -3, x = 0$
3. $y = x^3, y = 0, x = -1, x = 2$
4. $y = x^3, y = 0, x = -1, x = 3$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1. $y = x^2 - 2,\ y = 1 - 2x$
2. $y = x^3, \quad y = 8, \quad x = 0$
3. $y = 3x^2 + 1, \quad y = 3x + 6$
4. $y = x^2,\ y = x + 1$

3. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями.

1. $x^2 - y = 0, \quad y = 1$
2. $x^2 + y = 0, \quad y = -1$
3. $x - y^2 = 0, \quad x = 1$
4. $y = 4x^3, \quad x = 0, \quad y = -4$

Контрольные вопросы:

1. Сформулировать определение определенного интеграла.
2. Сформулировать геометрический смысл определенного интеграла.
3. Записать формулы для вычисления площади плоской фигуры.
4. Записать формулу для вычисления объема тела.

Практическая работа. №11.

Тема: Вычисление вероятностей сложных событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности и формула Бернулли.

Цель: формировать навыки решения задач по теории вероятности.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.
6.

Сведения из теории:

Событие - результат произведённого испытания.

Случайные события - событие, которое в результате данного испытания может произойти или не произойти.

Достоверное событие - событие, которое в результате данного испытания обязательно произойдёт.

Противоположные события - два случайных события, одно из которых происходит в том случае, когда не происходит другое.

Совместные события - два события, появление одного из которых не исключает возможность появления другого.

Равновозможные события - события, которым условия испытания обеспечивают одинаковую возможность появления каждого из них.

Определение. ***Вероятностью P(A) события A*** называется отношение числа m элементарных событий, благоприятствующих событию A, к общему числу n равновозможных элементарных событий:

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Аксиомы вероятностей:

Каждому событию А поставлено в соответствие неотрицательное число P(A), называемое вероятностью события А.

Если события A_1, A_2 … попарно несовместны, то $P(A_1+A_2+\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$

Свойства вероятностей:

Вероятность невозможного события равна нулю P=0.

Вероятность достоверного события равна единице P=1.

Вероятность произвольного случайного события А заключается между 0 и 1: 0<P(A) <1.

События А и В называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

Теорема 1. Вероятность суммы двух несовместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий.

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

Пример 1.

В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной (событие *А*).

Решение:

очевидно, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной, если произойдет любое из трех несовместных событий: *В* – одна деталь стандартная, две нестандартные; *С* – две детали стандартные, одна нестандартная; *Д* – три детали стандартные.

Т.о., событие *А* можно представить в виде суммы этих трех событий: *А*=*В*+*С*+*Д*.

Тогда $P(A)=P(B)+P(C)+P(Д)$.

Вычислим вероятность каждого события:

$$P(B)=\frac{C_5^1\cdot C_5^2}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 15\cdot 14}{1\cdot 1\cdot 2}=\frac{35}{76}$$

$$P(C)=\frac{C_5^2\cdot C_{15}^1}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 4\cdot 15\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 20\cdot 19\cdot 18}=\frac{5}{38}$$

$$P(Д)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 20\cdot 19\cdot 18}=\frac{1}{114}$$

Итак,

$$P(A)=\frac{35}{76}+\frac{5}{38}+\frac{1}{114}=\frac{137}{228}=0{,}601$$

Теорема 2. Если события А и В совместны, то вероятность их суммы выражается формулой

P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

Пример 2.

Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно?

Решение:

пусть *A* – число кратно 3, *B* – число кратно 5. Всего имеется 90 двузначных чисел: 10, 11, …, 98, 99. Из них 30 – кратные 3, 18 – кратные 5 и шесть чисел одновременно кратны и 3, и 5, поэтому:

$$P(A)=\frac{30}{90}=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{18}{90}=\frac{1}{5},\ P(AB)=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}.$$

Т.к. *A* и *B* совместные события, то по формуле имеем:

$$P(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}=\frac{7}{15}=0{,}467.$$

<u>*Определение*</u>. Два события *A* и *B* называют ***независимыми***, если появление одного из этих событий никак не влияет на вероятность появления второго события.

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей.

Другими словами, для двух независимых событий *A* и *B* верна формула

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

Пример 3

В первой урне 7 белых и 3 чёрных шара; во второй – 3 белых и 7 чёрных шаров. Из каждой урны наудачу вынимают 1 шар. Какова вероятность того, что оба вынутых шара белые?

Решение:

Событие А – вынутый белый шар из первой урны; В – вынутый белый шар из второй урны. События А и В – независимые, поэтому применяем формулу умножения вероятностей независимых событий.

Найдём вероятности событий: Р(А)=7/10=0,7; Р(В)=3/10=0,3

Р(АВ)=0,7*0,3=0,21

Ответ: 0,21

Формула полной вероятности.

Если событие A может произойти только при выполнении одного из событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, которые образуют ***полную группу несовместных событий***, то вероятность события A вычисляется по формуле

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n).$$

Эта формула называется ***формулой полной вероятности***.

Вновь рассмотрим полную группу несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, вероятности появления которых $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$. Событие A может произойти только вместе с каким-либо из событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, которые будем называть ***гипотезами***. Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)$$

Если событие A произошло, то это может изменить вероятности гипотез $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$.

По теореме умножения вероятностей

$$P(AB_1) = P(B_1)P(A|B_1) = P(A)P(B|A),$$

откуда

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}.$$

Аналогично, для остальных гипотез

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)}, \; i = 1, \ldots, n.$$

Полученная формула называется ***формулой Байеса*** (***формулой Бейеса***).

Пример 4.

В магазин поступила новая продукция с трех предприятий. Процентный состав этой продукции следующий: 20% - продукция первого предприятия, 30% - продукция второго предприятия, 50% - продукция третьего предприятия; далее, 10% продукции первого предприятия высшего сорта, на втором предприятии - 5% и на третьем - 20% продукции высшего сорта. Найти вероятность того, что случайно купленная новая продукция окажется высшего сорта.

Решение.

Обозначим через B событие, заключающееся в том, что будет куплена продукция высшего сорта, через A_1, A_2, A_3 обозначим события, заключающиеся в покупке продукции, принадлежащей соответственно первому, второму и третьему предприятиям.

Можно применить формулу полной вероятности, причем в наших обозначениях:

$$P(A_1) = 0,2 \qquad P(B|A_1) = 0,1$$

$$P(A_2) = 0,3 \qquad P(B|A_2) = 0,05$$

$$P(A_3) = 0,5 \qquad P(B|A_3) = 0,2$$

Подставляя эти значения в формулу полной вероятности, получим искомую вероятность:

$$P(B) = 0,2 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,2 = 0,135.$$

Формула Бернулли.

При решении вероятностных задач часто приходится сталкиваться с ситуациями, в которых одно и тоже испытание повторяется многократно и исход каждого испытания независим от исходов других. Такой эксперимент еще называется ***схемой повторных независимых испытаний*** или ***схемой Бернулли***.

Примеры повторных испытаний:

- бросание монеты или игрального кубика (вероятности выпадения герба/решки или определенной цифры одинаковы в каждом броске);
- извлечение из урны шара при условии, что вынутый шар после записи его цвета кладется обратно в урну (то есть состав шаров в урне не меняется и не меняется вероятность вынуть шар нужного цвета);

- включение приборов (ламп, станков и т.п.) с заранее заданной одинаковой вероятностью выхода из строя каждого;
- повторение стрелком выстрелов по одной и той же мишени при условии, что вероятность удачного попадания при каждом выстреле принимается одинаковой и т.д.

Итак, пусть в результате испытания возможны ***два исхода***: либо появится событие A, либо противоположное ему событие. Проведем n испытаний Бернулли. Это означает, что все n испытаний независимы; вероятность появления события A в каждом отдельно взятом или единичном испытании постоянна и от испытания к испытанию не изменяется (т.е. испытания проводятся в одинаковых условиях). Обозначим вероятность появления события A в единичном испытании буквой p, т.е. p=P(A), а вероятность противоположного события (событие A не наступило) – буквой q, $q = P(\overline{A}) = 1 - p.$

Тогда вероятность того, что событие A появится в этих n испытаниях ровно k раз, выражается ***формулой Бернулли***

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad q = 1 - p.$$

Распределение числа успехов (появлений события) носит название ***биномиального распределения***.

Пример 5.

В урне 20 белых и 10 черных шаров. Вынули 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Найти вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется 2 белых.

Решение.

Событие A – достали белый шар. Тогда вероятности

$P(A) = \dfrac{2}{3}$, $P(\overline{A}) = \dfrac{1}{3}$.

По формуле Бернулли требуемая вероятность равна

$$P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}.$$

Задание для самостоятельного решения:

Решите задачи.

а) Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 10 до 19 делится на три?

б) В первой урне находятся 10 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 9 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

в) В магазин поступила новая продукция с трех предприятий. Процентный состав этой продукции следующий: 70% - продукция первого предприятия, 20% - продукция второго предприятия, 10% - продукция третьего предприятия; далее, 20% продукции первого предприятия высшего сорта, на втором предприятии - 10% и на третьем - 30% продукции высшего сорта. Найти вероятность того, что случайно купленная новая продукция окажется высшего сорта.

г) В урне 10 белых и 20 черных шаров. Вынули 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Найти вероятность того, что из пяти вынутых шаров окажется 3 белых.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение вероятности события.
2. Сформулируйте теоремы сложения несовместных и совместных событий.
3. Сформулируйте теорему произведения независимых событий.
4. Формула полной вероятности.
5. Формула Бернулли.

Практическая работа №12.

Тема: Составление статистического распределения выборки, построение полигона и гистограммы.

Цель:

- сформировать представление о задачах математической статистики и овладеть навыками их решения.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории.

Генеральная и выборочная совокупности

Пусть имеется некоторая совокупность (множество) N однородных объектов. Назовем ее **генеральной совокупностью**, а число N – ее **объемом**.

Пусть требуется изучить генеральную совокупность относительно качественного или количественного признака. Например, имеется генеральная совокупность объемом N = 1000 деталей.
Примером качественного признака этой совокупности является стандартность деталей, а примером **количественного** признака – размер детали. Количественный признак выражается числом.

При этом можно проводить сплошное обследование всех объектов генеральной совокупности. Часто это неприемлемо, потому что:

- физически трудно;
- экономически нецелесообразно (дорого);
- иногда приводит к разрушению исследуемых объектов.

В таких случаях из генеральной совокупности отбирают некоторую часть объектов – n штук и подвергают их изучению, а выводы, полученные при изучении этой совокупности, распространяют на всю генеральную совокупность.

Определение. **Выборочной совокупностью** или просто **выборкой объема n** называется совокупность n объектов, отобранных из генеральной совокупности.

Выводы, полученные при изучении выборки, называются **эмпирическими**, то есть полученными опытным путем.

Замечание. Часто, если объем генеральной совокупности N достаточно велик, считают, что генеральная совокупность имеет бесконечный объем

Статистическое распределение выборки

Из генеральной совокупности, элементы которой обладают количественным признаком, производится выборка из n элементов. Наблюдаемые значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ количественного признака называется вариантами.

Последовательность значений вариант, записанная в возрастающем порядке, называется **вариационным рядом**. Число наблюдений того или иного значения признака называется частотой и обозначается n_i. Это означает, что варианта x_i наблюдалась n_i раз.

Относительной частотой варианты (признака) в выборке называется отношение:

$$W_i = \frac{n_i}{n},$$

где n - объем выборки.

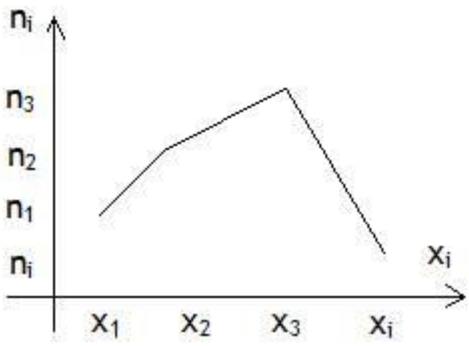
Статистическим распределением выборки называется перечень вариант и соответствующих им частот.

Варианта	x_1	x_2	x_3	...	x_k
Частота	n_1	n_2	n_3	...	n_k

$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n.$

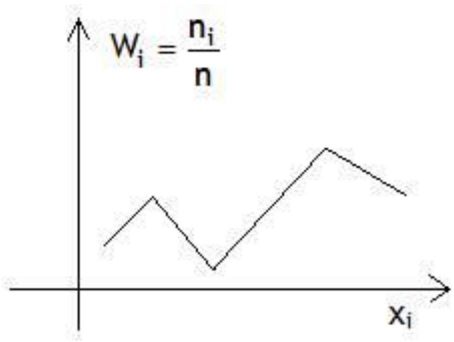
Полигон и гистограмма

Если соединить точки (x_1, n_1), …, (x_k, n_k), то получим ломаную линию, которая называется **полигоном частот**.



Полигон частот (x_i, n_i)

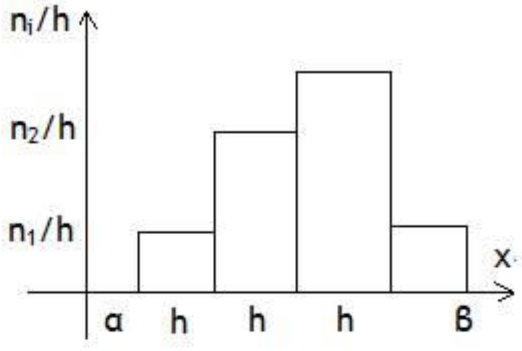
Если по оси ординат откладывать относительную частоту, а по оси абсцисс – значения количественного признака x_i, то получим **полигон относительных** частот.



Полигон относительных частот (x_i, n_i /n)

Гистограммой называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основания которых – частичные интервалы длиной h, а высоты равны n_i /h (i = 1, …, k).

Гистограммы строят, если количественный признак изменяется непрерывно, например, в интервале (α, β). Для построения **гистограммы частот** интервал (α, β) делят на частичные интервалы длиной h. По оси ординат откладывают высоту прямоугольника, равную n_i/h, где n_i - сумма частот всех вариант, попадающих в данный интервал.



Гистограмма

Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, то есть объему выборки.

Гистограммой относительных частот называется ступенчатая фигура, построенная аналогично, но по оси ординат откладывают плотность относительных частот, то есть n_i/hn. Площадь гистограммы относительных частот равна 1.

Полигоны и гистограммы используют для графического изображения статистических распределений.

Эмпирическая функция распределения

Эмпирическая функция распределения определяется по формуле:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n - объем выборки, n_x - число вариант, меньших x.

Она обладает теми же свойствами, что и рассмотренная в теории вероятностей функция распределения F(x).

Числовые характеристики статистического распределения выборки

Пусть выборка объема *n* состоит из чисел x_i , причем значение x_i встречается n_i раз (i = 1, …, k), $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$. Числовыми характеристиками статистического распределения выборки являются:

1) Выборочная средняя

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i. \qquad (15.1)$$

2) Размах выборки: $R = x_{max} - x_{min}$, где x_{max} и x_{min} – максимальное и минимальное числа в выборке.

3) Выборочная дисперсия:

$$D_E = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_E)^2 \cdot n_i.$$

Её удобнее вычислять по формуле:

$$D_E = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - n(\overline{x})^2\right). \qquad (15.2)$$

4) Выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D_в}.$$

<u>Пример</u>

Дана таблица распределения данных:

в выборке число x_i встречается n_i раз ($i = 1, \ldots, 6$). Найти $\overline{x}$ и D_E.

i	n_i	x_i
1	5	-2
2	15	-1
3	50	0
4	16	1
5	10	2
6	4	3

Для удобства вычислений добавим столбцы $n_i x_i$, $n_i x_i^2$ и строку Σ (сумм по столбцу):

i	n_i	x_i	n_ix_i	$n_ix_i^2$
1	5	-2	-10	20
2	15	-1	-15	15
3	50	0	0	0
4	16	1	16	16
5	10	2	20	40
6	4	3	12	36
Σ	100		23	127

По формуле (15.1) выборочное среднее:

$$\bar{x} = \frac{1}{100}23 = 0{,}23,$$

а по (15.2) выборочная дисперсия

$$D_E = \frac{1}{100}(127 - 100 \cdot (0{,}23)^2) \approx 1{,}22.$$

Задание для самостоятельного решения

Пример. Работников предприятия попросили с точностью до 10 минут оценить время, которое они тратят на дорогу до работы. Было опрошено 50 человек.

Полученные результаты были следующими: 20, 100, 20, 30, 40, 50, 30, 80, 90, 40, 30, 50, 20, 50, 30, 30, 50, 60, 60, 50, 30, 40, 60, 50, 100, 60, 90, 10, 20, 50, 90, 80, 20, 40, 50, 10, 50, 40, 30, 40, 60, 120, 30, 40, 60, 20, 60, 10, 50, 60.

Составьте таблицу распределения данных.

Найдите числовые характеристики данных измерения:

выборочное среднее $\bar{x}$, размах выборки, выборочную дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

Постройте полигон частот.

Контрольные вопросы

1. Объясните, что такое генеральная и выборочная совокупность.
2. Что такое вариационный ряд?
3. Как построить полигон частот?
4. Какие вы знаете числовые характеристики статистического распределения выборки и как их найти?

4.Список используемой литературы и интернет ресурсы.

1. Григорьев С.Г. Математика: учебник для студентов сред. проф. учреждений / С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина/ под ред. В.А. Гусева. – 11-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2020. – 416с:
2. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов [Электронный ресурс] / Режим доступа: www.fcior.edu.ru
3. Математика в Открытом колледже http://www.mathematics.ru
4. Общероссийский математический портал http://www.mathnet.ru
5. Московский центр непрерывного математического образования (МЦНМО) http://www.mccme.ru
6. Вся математика в одном месте http://www.allmath.ru
7. Образовательный математический сайт Exponenta.ru http://www.exponenta.ru
8. Электронная библиотека Издательский центр «Академия».