Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Троицкий технологический техникум»

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ЦМК
Абзалилова Г.А.
«30» апреля 2026 г.

Комплект
оценочных средств по учебной дисциплине

ОП.05 Математические методы решения прикладных профессиональных задач

Основной профессиональной образовательной программы (ОПОП)
по специальности СПО

08.02.08 Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения

Разработчик:
Орлова О.В. - преподаватель
дисциплин общепрофессионального цикла
ГБПОУ «ТТТ»

г. Троицк, 2026 год

Содержание

1. Паспорт комплекта оценочных средств……..…….... 3
1.1. Область применения комплекта контрольно-оценочных средств….. 3
1.2. Система контроля и оценки освоения программы учебной дисциплины…….……..... 5
.....
1.2.1. Формы промежуточной аттестации по учебной дисциплине……. 6
1.2.2. Организация текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения учебной дисциплины…….…….. 6
2. Задания для контроля и оценки освоения программы учебной дисциплины……. 7
2.1. Задания для текущего контроля…….……. 7
2.2. Задания для промежуточной аттестации…..…… 26
3. Рекомендуемая литература и иные источники…….…….. 29

1. Паспорт комплекта оценочных средств

1.1. Область применения комплекта оценочных средств

Комплект оценочных средств предназначен для проверки результатов освоения учебной дисциплины общепрофессионального цикла ОП.05 Математические методы решения прикладных профессиональных задач (далее - УД) основной профессиональной образовательной программы (далее ОПОП) по специальности 08.02.08 Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения.

Комплект оценочных средств позволяет оценивать:

1. Формирование элементов профессиональных компетенций (ПК) и элементов общих компетенций (ОК):

Профессиональные и общие компетенции	**Показатели оценки результата**	**Средства проверки**
1	2	3
ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам	Обосновывать подходящий метод для решения задачи, анализировать полученные результаты, критически оценивать их достоверность.	Тестирование, устный и письменный опрос, практические работы, математические диктанты, самостоятельные работы.
ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности	Применять средства информационных и коммуникационных технологий для решения профессиональных задач, владеть навыками распознавания и защиты информации.	
ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде	Применять и использовать преимущества командной и индивидуальной работы, обсуждать результаты совместной работы.	
ПК 1.3. Создавать элементы и узлы системы газоснабжения (сетей газораспределения и газопотребления) в качестве компонентов для информационной модели объекта.	Производить сложные вычислительные операции, работать с формулами, учитывать погрешности вычислений и измерений; решать технические задачи с применением математического анализа	

2. Оценка умений и усвоение знаний.

Освоенные умения, усвоенные знания	**Показатели результата**	**№ заданий для проверки**
1	2	3
Перечень умений, осваиваемых в рамках дисциплины: - применять методы математического моделирования и математического анализа, теоретического и экспериментального исследования для решения задач в профессиональной деятельности; - выбирать способы решения поставленных математических задач; - анализировать и интерпретировать полученные результаты.	Демонстрировать умения решать задачи линейного программирования об оптимальных перевозках и об оптимальном плане.	С.Р.№1 С.Р.№2
	Демонстрировать умения дифференцировать функции, используя таблицу производных и правила дифференцирования; находить производные сложных функций, исследовать функции с помощью производной и строить графики. Решать задачи на оптимизацию методами дифференциального исчисления.	М.Д.№1 С.Р.№3 С.Р.№4 С.Р.№5
	Демонстрировать нахождение неопределенных интегралов. Приближенно вычислять функции с помощью Формулы Тейлора Точно вычислять определенные интегралы с помощью формулы Ньютона-Лейбница. Демонстрировать решение прикладных задач с использованием элементов интегрального исчисления (вычисление площади криволинейной трапеции, вычисление объема геометрического тела).	М.Д.№2 С.Р.№6 С.Р.№7 П.Р. №9
	Решать простейшие задачи на вычисление вероятностей событий с применением теорем сложения и умножения вероятностей, формулы полной вероятности. Вычислять математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины по закону ее распределения.	Т.З. №1 П.Р.№11 П.Р.№12
Перечень знаний, осваиваемых в рамках дисциплины: - основные фундаментальные понятия математического анализа,	Точно и грамотно давать определение понятиям и методам математического анализа и синтеза, правилам дифференцирования. Называть основные методы интегрирования.	М.Д.№1 М.Д.№2 С.Р.№3 С.Р.№6 Т.З. №1

линейной алгебры, теории вероятностей и математической статистики, математического программирования для решения задач в профессиональной деятельности; - содержание утверждений и следствий из них, используемых для обоснования выбираемых математических методов решения задач в профессиональной деятельности.		

С.Р. – Самостоятельная работа

М.Д. – Математический диктант

Т.З. – Тестовое задания

П.Р. – Практическая работа

1.2 Система контроля и оценки освоения программы учебной дисциплины

1.2.1. Формы промежуточной аттестации по УД.

Учебная дисциплина	Формы промежуточной аттестации
1	2
ОП. 05 Математические методы решения прикладных профессиональных задач	Дифференцированный зачет

1.2.2. Организация текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения программы учебной дисциплины.

Текущий контроль знаний и умений осуществляется по результатам выполнения письменных проверочных работ, устных ответов обучающегося, тестовых вопросов, выполнения и защиты практических заданий.

Итоговый контроль освоения учебной дисциплины ОП.05 Математические методы решения прикладных профессиональных задач осуществляется на дифференцированном зачете.

Критерии оценивания

Критерии и шкалы оценивания в результате изучения дисциплины при проведении текущего контроля и промежуточной аттестации:

Шкалы оценивания	**Критерии оценивания**
отлично	85-100 %
хорошо	70-85 %
удовлетворительно	50 -70 %
неудовлетворительно	< 50%

Критерии оценивания:

Предлагаемые критерии носят рекомендательный характер:

- оценка «отлично» выставляется обучающемуся за работу, выполненную безошибочно, в полном объеме с учетом рациональности выбранных решений;

- оценка «хорошо» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в полном объеме с недочетами;

- оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в не полном объеме (не менее 50% правильно выполненных заданий от общего объема работы).

- оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в не полном объеме (менее 50% правильно выполненных заданий от общего объема работы)

2. Задания для контроля и оценки освоения программы УД.

2.1. Задания для текущего контроля.

Раздел 1. Основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности

Тема 1.1 Решение задач на оптимизацию методами линейного программирования.

Самостоятельная работа №1

Тема: Задача об оптимальных перевозках

Транспортная задача

Поставщики	Тарифы и потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	11	2	6	7	56
A_2	1	13	0	10	58
A_3	1	6	8	7	27
Потребности	30	32	35	44	141

Где A_{ij} – затраты на перевозку единицы продукции.

A_i – запасы.

B_j – потребности потребителя.

X_{ij} – количество единиц продукции, перевозимой из i – го пункта на j – ое предприятие.

Определить план перевозок ($X_{оптим.}$) при котором стоимость затрат на поставку продукции будет минимальной и потребности потребителей будут удовлетворены.

Эталон ответа:

$$X_{\text{оптим.}} = \begin{pmatrix} 0 & 32 & 0 & 24 \\ 23 & 0 & 35 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$$F_{min}(X) = 402$$

Самостоятельная работа №2

Тема: Задача об оптимальном плане

Решите задачу производственного планирования на основе данных представленных в таблице:

Тип ресурса	Нормы затрат на единицу продукции		Запасы ресурсов
	A	B	
Электроэнергия	1	2	21
Оборудование	1	6	21
Сырьё	8	4	14
	30	15	

Определить, какую продукцию (А или В) выгоднее выпускать и в каком количестве, чтобы прибыль была максимальной.

Эталон ответа:

Наиболее выгодным является выпуск продукции вида А в количестве 7ед. за четыре плановых периода ($X_1 = \frac{7}{4}$), продукцию вида В выпускать не выгодно ($X_2 = 0$). При этом прибыль составит $F_{max}(X) = \frac{105}{2}$ ден. ед.

Тема 1.2 Решение задач на оптимизацию методами дифференциального исчисления

Математический диктант №1

Задание:

сформулировать правила дифференцирования и записать производные основных элементарных функций:

1. $c' =$
2. $(x^{\alpha})' =$
3. $(kx+b)' =$
4. $(a^{x})' =$
5. $(e^{x})' =$
6. $(\log_a x)' =$
7. $(\ln x)' =$
8. $(\sin x)' =$
9. $(\cos x)' =$
10. $(tgx)' =$
11. $(ctgx)' =$
12. $(\arcsin x)' =$
13. $(\arccos x)' =$
14. $(arctgx)' =$
15. $(arcctgx)' =$

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

16. $(cu)' =$
17. $(u+v)' =$
18. $(u-v)' =$
19. $(uv)' =$
20. $\left(\frac{u}{v}\right)' =$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

21. $f(\varphi(x))' =$

Эталон ответа:

1. $c' = 0$
2. $(x^{\kappa})' = \kappa \cdot x^{\kappa-1}$
3. $(kx+b)' = k$
4. $(a^{x})' = a^{x} \ln a$

5. $(e^x)' = e^x$

6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

8. $(\sin x)' = \cos x$

9. $(\cos x)' = -\sin x$

10. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

11. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

15. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

16. $(cu)' = cu'$

17. $(u+v)' = u'+v'$

18. $(u-v)' = u'-v'$

19. $(uv)' = u'v + uv'$

20. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

21. $f(\varphi(x))' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

Самостоятельная работа №3

Вариант 1

А1. Найдите производную функции:

а) $(2-3x)^4$; *б)* $\frac{2}{x^2}-\sin x$; *в)* $\sin x-3\cos x$; *г)* $\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$.

А2. Найдите значение производной функции

$f(x)=0,5\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ в точке $x_0=\frac{\pi}{12}$.

В1. Найдите производную функции:

а) $x^4\sin x$; *б)* $3\sin^2 x+tgx$; *в)* $\sqrt{\cos x}$.

Вариант 2

А1. Найдите производную функции:

а) $(5x+7)^5$; *б)* $\sqrt{x}-\cos x$; *в)* $tgx-2\cos x$; *г)* $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$.

А2. Найдите значение производной функции

$f(x)=0,5\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ в точке $x_0=\frac{\pi}{9}$.

В1. Найдите производную функции:

а) $2x^3\cos x$; *б)* $\sin^2 x-ctgx$; *в)* $\sqrt{1-2x^2}$.

<u>Эталон ответа:</u>

Вариант 1

А1. а) $-12(2-3x)^3$; б) $-4x^{-3}-cosx$; в) $cosx+3sinx$; г) $-4sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$

А2. $\frac{1}{2}$

В1. а) $4x^3\cdot\sin x+x^4\cdot\cos x$; б) $3\sin 2x+\frac{1}{\cos^2 x}$; в) $\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

Вариант 2

А1. а) $25(5x+7)^4$; б) $\frac{1}{2\sqrt{x}}+sinx$; в) $\frac{1}{cos^2x}+2sinx$; г) $3\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$

А2. $-0{,}75$

В1. а) $6x^2\cdot\cos x-2x^3\cdot\sin x$; б) $\sin 2x+\frac{1}{\sin^2 x}$; в) $-\frac{2x}{\sqrt{1-2x^2}}$

Самостоятельная работа №4

Вариант 1

1. Исследовать функцию и построить график

$$f(x)=2+3x-x^3$$

Вариант 2

1. Исследовать функцию и построить график

$$f(x)=-x^3+4x^2-4x$$

Вариант 3

1. Исследовать функцию и построить график

$$f(x)=x^3+6x^2+9x$$

Вариант 4

1. Исследовать функцию и построить график

$$f(x)=-x^4+8x^2-16$$

Эталон ответа:

Вариант 1

1. $f_{min}(-1)=0,\quad f_{max}(1)=4$

Вариант 2

1. $\mathrm{f}_{\min}\left(\frac{2}{3}\right) = -1\frac{5}{27}, \quad \mathrm{f}_{\max}(2) = 0$

Вариант 3

1. $\mathrm{f}_{\min}(-1) = -4, \quad \mathrm{f}_{\max}(-3) = 0$

Вариант 4

1. $\mathrm{f}_{\min}(0) = -16, \quad \mathrm{f}_{\max}(-2) = 0, \quad \mathrm{f}_{\max}(2) = 0$

Самостоятельная работа №5

Вариант 1

1. Найти скорость и ускорение в указанный момент времени для точки, движущейся прямолинейно, если движение точки задано уравнением: $s = t^3 + 5t^2 + 4, \ t = 2$
2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ на отрезке [-4;3]

Вариант 2

1. Найти скорость и ускорение в указанный момент времени для точки, движущейся прямолинейно, если движение точки задано уравнением: $s = 4t^3 + t^2 - 14, \ t = 2$
2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3$ на отрезке $[-2;2]$

Вариант 3

1. Найти скорость и ускорение в указанный момент времени для точки, движущейся прямолинейно, если движение точки задано уравнением: $s = t^2 + 11t + 30, \ t = 3$
2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ на отрезке [-3;2]

Вариант 4

1. Найти скорость и ускорение в указанный момент времени для точки, движущейся прямолинейно, если движение точки задано уравнением:

$$s = 2t^3 + t^2 - 4,\ t = 4$$

2. 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3$ на отрезке [-2;3]

Эталон ответа:

Вариант 1

1. $V = 32,\quad a = 22$
2. $f_{\text{наиб}}(-3) = 81.\ f_{\text{наим}}(2) = -44$

Вариант 2

1. $V = 52,\quad a = 50$
2. $f_{\text{наиб}}(2) = 16.\ f_{\text{наим}}(-2) = -16$

Вариант 3

1. $V = 17,\quad a = 2$
2. $f_{\text{наиб}}(-3) = 14.\ f_{\text{наим}}(-2) = -27$

Вариант 4

1. $V = 104,\quad a = 2.$
2. $f_{\text{наиб}}(3) = 24.\ f_{\text{наим}}(-2) = -11$

Тема 1.3 Решение задач на оптимизацию методами интегрального исчисления

Математический диктант №2

Задание: запишите интегралы основных элементарных функций.

1. $\int 0\,dx =$

2. $\int x^n\,dx =$
3. $\int e^x\,dx =$
4. $\int a^x\,dx =$
5. $\int \sin x\,dx =$
6. $\int \cos x\,dx =$
7. $\int \frac{dx}{cos^2 x} =$
8. $\int \frac{dx}{sin^2 x} =$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$
10. $\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} =$
12. $\int -\frac{dx}{1+x^2} =$

Эталон ответа:

1. $\int 0\,dx = C$
2. $\int x^n\,dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, & n \neq -1 \\ \ln|x| + C, & n = -1 \end{cases}$
3. $\int e^x\,dx = e^x + C$
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$
8. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsinx + C$
10. $\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arccosx + C$
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

12. $\int -\frac{\mathrm{dx}}{1+\mathrm{x}^2} = \mathrm{arcctgx} + \mathrm{C}$

Самостоятельная работа №6

Вариант 1

1.Вычислить: $\int_0^2 \frac{xdx}{1+x^2}$

2. Тело движется прямолинейно со скоростью $V = (2t^2 + 1)м/сек.$ Найдите путь пройденный телом за первые 5 секунд.

Вариант 2

1. Вычислить: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$

2. Тело движется по прямой со скоростью $V = (6t + 4)м/сек.$ Найдите длину пути, пройденного телом за третью секунду.

Вариант 3

1. Вычислить: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx$

2. Скорость тела, движущегося прямолинейно, задается формулой $V = (9t - 3t^2)м/сек.$ Найдите путь, пройденный телом от начала его движения до остановки.

Эталон ответа:

Вариант 1

1) $\frac{1}{2}\ln 5$
2) 83

Вариант 2

1) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$
2) 19

Вариант 3

1) $-\frac{1}{3}\ln 4$

2) $13{,}5$

Самостоятельная работа №7

Вариант 1

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y+x^2-8=0$ и $y=x^2$

б) $y = sinx$ *при* $0 \le x \le \pi$

Вариант 2

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = 6-x$, $y = x^2+4$

б) $xy = 4$, $x + y - 5 = 0$

Эталон ответа:

Вариант 1

а) $S = 21\frac{1}{3}$ кв.ед.

б) $S = 2$кв.ед.

Вариант 2

а) $S = 4\frac{1}{2}$ кв.ед.

б) $S = (7{,}5 - 8\ln 2)$кв.ед.

Практическая работа №9

Тема: Применение интегрального исчисления для вычисления объема геометрических тел.

Цель: закрепить навыки вычисления объема тела вращения с помощью определённого интеграла**.**

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Математика, линейка, карандаш.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Вычисление объемов тел вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси *OX* криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью *OX* и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис.1), то его объем вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx.$$

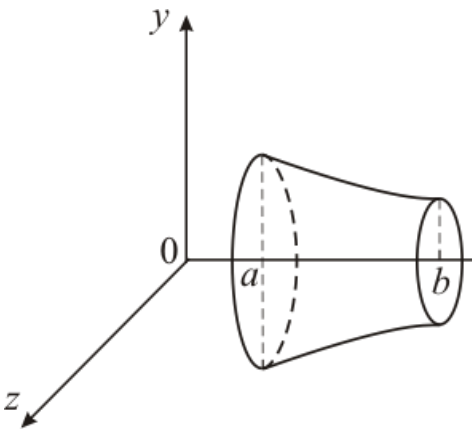


Рис. 1

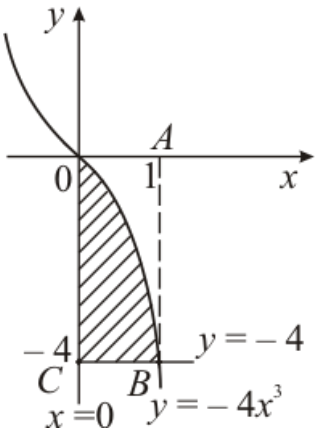


Рис. 2

Пример. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями: $y = -4x^3$, $x = 0$, $y = -4$.

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 2).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры *OABC*, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры *OAB*. Тогда искомый объем $V = V_1 - V_2$. По формуле

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx.$$

найдем V_1 и V_2: $V_1 = \pi\int_0^1 (-4)^2\,dx = \pi 16x\big|_0^1 = 16\pi$ (ед. объема);

$$V_2 = \pi\int_0^1 \left(-4x^3\right)^2 dx = 16\pi\int_0^1 x^6 dx = 16\pi\frac{x^7}{7} = \frac{16\pi}{7}$$ (ед. объема);

$$V = V_1 - V_2 = 16\pi - \frac{16\pi}{7} = \frac{96}{7}\pi \approx 43{,}085$$ (ед. объема).

Задание для самостоятельного решения:

Задание: Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями.

1) $x^2 - y = 0, \quad y = 1$

2) $x^2 + y = 0, \quad y = -1$

3) $x - y^2 = 0, \quad x = 1$

4) $y = 4x^3, \quad x = 0, \quad y = -4$

5) $y = 4x^3, \quad x = 1, \quad y = 0$

6) $y = -4x^3, \quad x = -1, \quad y = 0$

Контрольные вопросы:

1. Сформулировать определение определенного интеграла.
2. Записать формулу для вычисления объема тела.

Раздел 2 Основы теории вероятностей и математической статистики

Тест №1

Из четырех ответов выберите один правильный.

1.Указать верное определение. Суммой двух событий называется:

а) Новое событие, состоящее в том, что происходят оба события одновременно.

б) Новое событие, состоящее в том, что происходит или первое, или второе, или оба вместе.

в) Новое событие, состоящее в том, что происходит одно, но не происходит другое.

2.Указать верное определение. Произведением двух событий называется:

а) Новое событие, состоящее в том, что происходят оба события одновременно.

б) Новое событие, состоящее в том, что происходит или первое, или второе, или оба вместе.

в) Новое событие, состоящее в том, что происходит одно, но не происходит другое.

3.Указать верное определение. Вероятностью события называется:

а) Произведение числа исходов, благоприятствующих появлению события на общее число исходов.

б) Сумма числа исходов, благоприятствующих появлению события и общего числа исходов.

в) Отношение числа исходов, благоприятствующих появлению события к общему числу исходов.

4.Указать верное утверждение. Вероятность невозможного события:

а) Больше нуля и меньше единицы;

б) Равна нулю;

в) Равна единице.

5.Указать верное утверждение. Вероятность достоверного события:

а) Больше нуля и меньше единицы;

б) Равна нулю;

в) Равна единице.

6.Указать верное свойство. Вероятность случайного события:

а) Больше нуля и меньше единицы;

б) Равна нулю;

в) Равна единице.

7.Указать правильное утверждение:

а) Вероятность суммы событий равна сумме вероятностей этих событий.

б) Вероятность суммы независимых событий равна сумме вероятностей этих событий.

в) Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих

событий.

8.Указать правильное утверждение:

а) Вероятность произведения событий равна произведению вероятностей этих событий.

б) Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

в) Вероятность произведения несовместных событий равна произведению вероятностей этих событий.

Эталон ответа:

1. б
2. а
3. в
4. б
5. в
6. а
7. в
8. б

Практическая работа №11

Тема: Решение задач на нахождение вероятности события

Цель - закрепление теоретического материала по теме «Элементы теории вероятностей», формирование умений решать задачи на определение вероятности.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Математика.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

1. Определение вероятности

Определение 1. Постоянная величина *p*, к которой все более приближается частота событий *A* при достаточно большом повторении опыта, называется *вероятностью события A* и обозначается *p=P(A).*

Определение 2. Вероятностью P(A) события A называется отношение числа *m* элементарных событий, благоприятствующих событию *A*, к общему числу *n* равновозможных элементарных событий:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

2. Теоремы сложения вероятностей

Теорема 1. Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий.

P(A+B)=P(A)+P(B)

Теорема 2. Если события A и B совместны, то вероятность их суммы выражается формулой

P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

Примеры решения задач.

Пример 1.

На автогонках при заезде на первой автомашине вероятность победить $P_1 = 0,6$, при заезде на второй автомашине $P_2 = 0,9$. Найти:

- вероятность того, что победят обе автомашины;
- вероятность того, что победит хотя бы одна автомашина;

Решение.

1) Вероятность того, что победит первая автомашина, не зависит от результата второй автомашины, поэтому события A (победит первая автомашина) и B (победит вторая автомашина) – независимые события. Найдём вероятность того, что победят обе машины:

$$P(AB) = 0,6 \times 0,9 = 0,54.$$

2) Найдём вероятность того, что победит одна из двух автомашин:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) =$$
$$= 0,6 + 0,9 - 0,54 = 0,96.$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. В лотерее 1000 билетов, из них на один билет падает выигрыш 500 рублей, на 100 билетов - выигрыши по 100 рублей, 50 билетов - выигрыши по 20 рублей, на 100 билетов – выигрыши по 5 рублей, остальные билеты невыигрышные. Некто покупает один билет. Найти вероятность выиграть не менее 20 рублей.
2. Производится бомбометание по трем складам боеприпасов, причем сбрасывается одна бомба. Вероятность попадания в первый склад 0,01, во второй 0,08, в третий 0,025. При попадании в один из складов взрываются все три. Найти вероятность того, что склады будут взорваны.
3. Студент сдает экзамен по математике. Вероятность получить на экзамене «неуд.» равна 0,1; «уд.» -0,5; «хор.»-0,3; «отл.»- 0,1. Какова вероятность того, что студент получит на экзамене положительную оценку?

Контрольные вопросы:

1. Понятие случайного события.
2. Виды событий.
3. Определение вероятности события.
4. Формула для вычисления вероятности события.
5. Теорема сложения вероятностей для совместных и несовместных событий.

Практическая работа № 12

Тема: Решение задач с реальными дискретными случайными величинами. Математическое ожидание случайной величины. Дисперсия случайной величины

Цель - закрепление теоретического материала по изучению математического ожидания и дисперсии дискретной случайной, формирование умений находить основные характеристики случайной величины.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Математика.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Случайные величины (дискретные и непрерывные) характеризуются своим законом распределения. Заметим, что это исчерпывающая характеристика в том смысле, что в законе распределения содержится вся информация о случайной величине. Никакой сколь угодно сложной математической обработкой наблюдаемых значений случайной величины о ней невозможно получить сведения, не содержащиеся в законе распределения. Однако этот закон часто неизвестен и о нем приходится судить на основе каких-то приближенных оценок. С другой стороны, для многих практических задач такая информация является избыточной: достаточно знать лишь некоторые количественные характеристики закона распределения.

Простейшей, но очень важной характеристикой является математическое ожидание.

Пусть, например, X - дискретная случайная величина распределена по закону:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Тогда ее *математическое ожидание M(X)* определяется равенством

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n.$$

Обратим внимание на то, что хотя конкретные значения величины X являются случайными, математическое ожидание $M(X)$ случайным не является.

Пусть, например, испытание состоит в бросании игрального кубика. Поскольку выпадение каждой грани равновозможно, Pi=1/6. Следовательно, математическое ожидание числа выпавших очков равно

$$M(X) = 1/6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21/6 = 3{,}5.$$

Число, близкое к этому, получится, если реально бросать кубик много раз и подсчитать сумму очков, деленную на число бросков.

Математическое ожидание и среднее арифметическое случайной величины - важные характеристики закона распределения, но, зная только их, мы имеем еще весьма одностороннее представление о нем. Не ясно, например, как велики могут быть отклонения значений величины от этих характеристик. Ведь одно и то же значение среднего арифметического наблюдаемых значений может получиться как в случае, когда все значения находятся вблизи среднего, так и в случае сколь угодно больших отклонений от него в сторону больших и меньших величин.

Для того чтобы характеризовать в среднем величины таких отклонений, вводится еще один важный параметр закона распределения, называемый дисперсией.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D\{X) = M[X - M(X)]^2.$$

Так же дисперсию можно вычислить и по формуле:

$$D\{X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

т. е. как разность математического ожидания квадрата значений случайной величины и квадрата её математического ожидания.

Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

Многие случайные величины, встречающиеся на практике, имеют размерность. Например, величины, которые встречаются при различных измерениях. Тогда, если, скажем, случайная величина измеряется в метрах, то дисперсия будет иметь размерность м^2. Поэтому вводится еще одна характеристика, называемая *средним квадратическим отклонением*, обозначается: $\sigma = \sqrt{D(X)}$. ее размерность совпадает с размерностью случайной величины.

Пример 1.

Пусть X – число очков, выпадающих при одном бросании игральной кости. Найти дисперсию случайной величины X.

Решение:

случайная величина X – число очков принимает значения 1, 2, 3, 4, 5, 6. Составим закон её распределения:

X_i	1	2	3	4	5	6

P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тогда её математическое ожидание:

$$M(X)= 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3{,}5\,.$$

Найдем отклонения для $x_1, x_2, \ldots, x_6$:

x_1^0=1-3,5; x_2^0=2-3,5; x_3^0=3-3,5; x_4^0=4-3,5; x_5^0=5-3,5; x_6^0=6-3,5.

Вычислим дисперсию:

$$D(X)=\frac{1}{6}((1-3{,}5)^2+(2-3{,}5)^2+(3-3{,}5)^2+(4-3{,}5)^2+(5-3{,}5)^2+(6-3{,}5)^2)=\frac{35}{12}\,.$$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант

1) Монету подбрасывают 7 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа появлений герба.

2) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	1	3	4	6	7
p	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

2 вариант

1) Игральную кость подбросили 5 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа невыпадения единицы.

2) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

3 вариант

1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	1	4	7	10	13
p	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

2) Монету подбрасывают 6 раз. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – выпадения «решки».

4 вариант

1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	1	2	3	4	5
p	0,15	0,17	0,35	0,21	0,12

2) Монету подбрасывают 5 раз. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – выпадения герба.

Контрольные вопросы:

1. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины?
2. Что называется дисперсией дискретной случайной величины?

2.2. Задания для промежуточной аттестации.

Вопросы к дифференцированному зачету

1. Сформулируйте понятие задачи линейного программирования, приведите примеры.
2. В чем заключается транспортная задача линейного программирования?
3. Опишите основную цель задачи оптимизации производства.
4. Сформулируйте определение производной функции.
5. Сформулируйте геометрический и механический смысл производной.
6. Как найти производную суммы или разности функций? Приведите примеры.
7. Запишите формулу нахождения производной произведения двух функций.
8. Как найти производную частного двух функций?
9. Объясните механический смысл второй производной.
10. Дайте понятие критических точек функции.
11. Сформулируйте алгоритм нахождения промежутков возрастания и убывания функции.
12. Сформулируйте алгоритм нахождения точек экстремума функции.
13. Сформулируйте алгоритм нахождения наибольшего, наименьшего значения функции.
14. Дайте определение неопределенного интеграла.
15. Перечислите свойства неопределенного интеграла.
16. Дайте определение определенного интеграла.
17. Перечислить свойства определенного интеграла.
18. Запишите формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла.
19. Сформулируйте геометрический смысл определенного интеграла.
20. Запишите формулу для вычисления объема геометрических тел с использованием интегрального исчисления.
21. Что такое факториал числа?
22. Как вычислить количество перестановок из n элементов?
23. Объясните формулу сочетаний C_n^k .
24. Чем отличаются сочетания от размещений?
25. Сформулируйте понятие события, какие вы знаете виды событий, приведите примеры.
26. Сформулируйте классическое определение вероятности.
27. Объясните, в чем заключается выборочный метод математической статистики.
28. Как можно найти средние величины, моду, медиану, размах выборки.

29. Дайте понятие случайной величины. Объясните виды случайных величин (дискретные и непрерывные).
30. Перечислите характеристики случайной величины, и методику их вычисления.

Задачи к дифференцированному зачету.

1. Задача об оптимальном плане: определить, какую продукцию (А или В) выгоднее выпускать и в каком количестве, чтобы прибыль была максимальной.
   Составьте целевую функцию для данной задачи и систему ограничений, если x_1 – количество продукции вида А, x_2 – количество продукции вида В.

Тип ресурса	Нормы затрат на единицу продукции		Запасы ресурсов
	А	В	
Электроэнергия	1	2	23
Оборудование	9	7	22
Сырьё	3	4	17
	15	20	

2. Транспортная задача: определить план перевозок ($X_{оптим.}$) при котором стоимость затрат на поставку продукции будет минимальной и потребности потребителей будут удовлетворены.
   Составьте целевую функцию для данной задачи и систему ограничений, если: A_{ij} – затраты на перевозку единицы продукции, A_i – запасы, B_j – потребности потребителя, X_{ij} – количество единиц продукции, перевозимой из i – го пункта на j – ое предприятие.

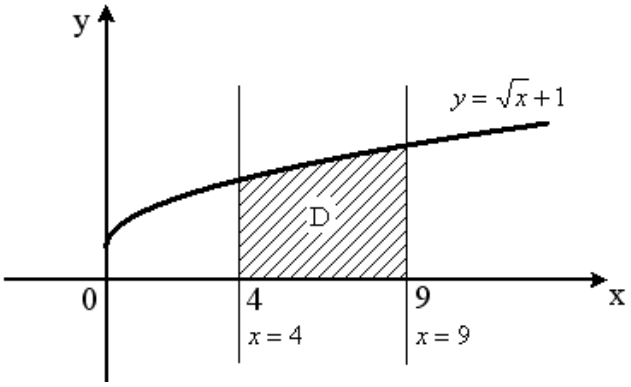
Поставщики	Тарифы и потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	11	2	6	7	56
A_2	1	13	0	10	58
A_3	1	6	8	7	27
Потребности	30	32	35	44	141

3. Найдите производную функции $y = \sqrt{x^3 - 6x}$
4. Найдите производную функции $y = \ln(-5x + 4)$
5. Найдите производную функции $y = tg^3(2x^3 + x - 7)$
6. Исследовать функцию и построить график
$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$$
7. Вычислите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 6x^2 + 4$, на отрезке [-4;3]

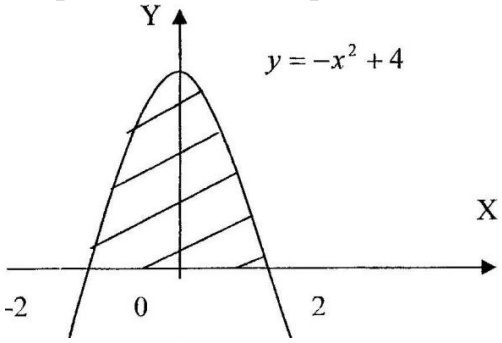
8. Найдите неопределенный интеграл: $\int(1-12x)^5 dx$

9. Вычислите определенный интеграл: $\int_0^1(-x^2+3)dx$

10. Вычислите площадь криволинейной трапеции (D)



11. Вычислите площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке.



12. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями: $x-y^2=0,\quad x=1$

13. Найдите вероятность появления одного из двух несовместных событий A и B (безразлично какого), вероятности которых соответственно: P(A)=0,1; P(B)=0,8

14. Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной законом распределения

X	2	5	8
P	0,2	0,3	0,5

15. Математическое ожидание квадрата случайной величины, заданной законом распределения

X	-2	0	1
P	0,5	0,2	0,3

равно $M(X^2)=2,3$. Чему равна дисперсия?

3. Рекомендуемая литература и иные источники

3.1. Основные печатные издания

1. Баврин, И. И. Математика для технических колледжей и техникумов: учебник и практикум для среднего профессионального образования / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва. Издательство Юрайт, 2022. — 397 с. — (Профессиональное образование). — Текст: непосредственный. ISBN 978-5-534-08026-1.
2. Богомолов, Н. В. Математика: учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2022. — 401 с. — (Профессиональное образование). — Текст: непосредственный. ISBN 978-5-534-07878-7.
3. Богомолов, Н. В. Математика: Задачи с решениями. В 2 частях. Ч. 2 учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2022. — 320 с. — (Профессиональное образование). — Текст: непосредственный. ISBN 978-5-534-09135-9 (ч. 2).

3.2. Электронные издания (электронные ресурсы)

1. Математический портал. Практические занятия по высшей математике. [Электронный ресурс]: http://mathportal.net/
2. Справочники по математике. [Электронный ресурс]: http://www.terver.ru/

3.3. Дополнительные источники

1. Григорьев С.Г. Математика: учебник для студентов сред. проф. учреждений / С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина /под ред. В.А. Гусева. – 13-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2023. – 416 с.