Министерство образования и науки Челябинской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Троицкий технологический техникум»

Методические указания
по выполнению практических работ

по учебной дисциплине: ЕН.01 Математика

по специальности: 13.02.03 Электрические станции, сети и системы

Троицк, 2023г.

Методические указания для выполнения практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины ЕН.01 Математика по специальности: 13.02.03 Электрические станции, сети и системы.

Организация-разработчик: ГБПОУ «Троицкий технологический техникум».

Разработчик: О.В. Орлова, преподаватель математики высшей квалификационной категории.

Рассмотрено и одобрено на заседании цикловой методической комиссии преподавателей общеобразовательных дисциплин, ОГСЭ и ЕН циклов

Протокол № 9 от. «26» мая 2023г.

Содержание:

1. Пояснительная записка

Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика» предназначена для студентов второго курса по специальности 13.02.03 Электрические станции, сети и системы.

Практические работы служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же для получения практических знаний.

Практические задания выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания. К практическому занятию от студента требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием. Список литературы и вопросы, необходимые при подготовке, студент получает перед занятием из методических рекомендаций.

Практические задания разработаны в соответствии с рабочей программой. В зависимости от содержания они могут выполняться студентами индивидуально или фронтально.

В соответствии с учебным планом на практические занятия отводится – 48ч.

Учебные и воспитательные цели практических занятий.

В рамках традиционного подхода:

1) актуализировать знания студентов из курса математики по теме занятия;

2) создать условия для развития творческой активности, самостоятельности и критичности мышления, умения работать в коллективе.

В рамках компетентностного подхода:

1) содействовать развитию у студентов общенаучных компетенций (аналитико-синтетической, прогностической, проектировочной);

2) создать условия для развития коммуникативной, адаптивной и информационной компетенций.

2. Общие требования по выполнению работы и оформлению отчета; критерии оценивания работ.

После изучения соответствующей темы студенты выполняют практическую работу. Содержание практических работ полностью соответствует рабочей программе по математике.

К выполнению практической работы можно приступать только после изучения соответствующей темы и получения навыков решения задач. Предусмотренные задания носят репродуктивный, частично-поисковый и поисковый характер. Все задачи и расчеты обязательно должны быть доведены до окончательного числового результата. После выполнения работы обучающийся должен представить отчет о проделанной работе с обсуждением полученных результатов.

Все практические работы, сдаваемые обучающимися на проверку, должны быть выполнены в обычной тетради в клетку.

При выполнении практической работы студентам рекомендуется:

- использовать учебные пособия, справочники;
- проводить несложные дедуктивные рассуждения;
- обосновывать шаги решения задач;
- формулировать определения математических понятий;
- пользоваться математической терминологией и символикой;
- письменно оформлять решения задач;
- пользоваться калькулятором;
- самостоятельно изучать учебный материал.

Практическая работа выполняется в сроки, установленные в соответствии с календарно-тематическим планом. За каждую практическую работу студент должен получить положительную оценку.

Итоговой формой изучения дисциплины является зачет. Студенты, не выполнившие все практические работы, не аттестуются и к зачету не допускаются.

Критерии оценки практических работ

Оценка «5» – работа выполнена в полном объеме и без замечаний.

Оценка «4» – работа выполнена правильно с учетом 2-3 несущественных ошибок исправленных самостоятельно по требованию преподавателя.

Оценка «3» – работа выполнена правильно не менее чем на половину или допущена существенная ошибка.

Оценка «2» – допущены две (и более) существенные ошибки в ходе работы, которые обучающиеся не может исправить даже по требованию преподавателя или работа не выполнена.

3. **Тематика и содержание практических работ учебной дисциплины ЕН.01 Математика**

Наименование тем	Практические работы	Кол-во часов
1	2	3
Раздел 1. Элементы линейной алгебры		**10**
Тема 1.1. Матрица и определители	Практическая работа №1 «Операции над матрицами. Вычисление определителей».	2
	Практическая работа №2 «Вычисление обратной матрицы ».	2
Тема 1.2. Системы линейных уравнений	Практическая работа №3«Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы».	2
	Практическая работа №4 «Решение системы линейных уравнений по правилу Крамера».	2
	Практическая работа №5«Решение системы линейных уравнений методом Гаусса».	2
Раздел 2. Элементы математического анализа		**26**
Тема 2.1 Дифференциальное исчисление	Практическая работа №6 «Вычисление пределов функций в точке и на бесконечности»	2
	Практическая работа №7 «Дифференцирование сложных функций»	2
	Практическая работа №8 «Приложение дифференциала к приближённым вычислениям»	2
	Практическая работа №9 «Исследование функции. Построение графиков».	2
	Практическая работа №10 «Решение прикладных задач с помощью производной».	2
	Практическая работа №11 «Решение прикладных задач с помощью производной и дифференциала»	2

	Практическая работа №12 «Нахождение частных производных»	2
Тема 2.2 Интегральное исчисление.	Практическая работа №13 «Интегрирование простейших функций»	2
	Практическая работа №14 «Вычисление интегралов методом заменой переменных и по частям».	2
	Практическая работа №15 «Вычисление интегралов дробно-рациональных функций»	2
	Практическая работа №16 «Вычисление площадей»	2
	Практическая работа №17 «Вычисление объёмов тел вращения»	2
	Практическая работа №18 «Приближённое вычисление определённого интеграла».	2
Раздел 3. Основы теории комплексных чисел		**8**
Тема 3.1 Основные свойства комплексных чисел	Практическая работа №19 «Действия над комплексными числами в алгебраической форме»	2
	Практическая работа №20 «Действия над комплексными числами в тригонометрической форме»	2
Тема 3.2 Некоторые приложения теории комплексных чисел	Практическая работа №21 «Решение прикладных задач на применение комплексных чисел».	2
	Практическая работа №22 «Применение комплексных чисел при решении алгебраических задач»	2
Раздел 4 Элементы математического анализа		**4**
Тема 4.1 Дифференциальные уравнения.	Практическая работа №23 «Решение дифференциальных уравнений 1 порядка».	2
	Практическая работа №24 «Решение дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами».	2

Практическая работа № 1

Тема: Операции над матрицами. Вычисление определителей.

Цель работы:

- формировать умения выполнять арифметические действия над матрицами и вычислять определители.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Обозначения: А – матрица, a_{ij} - элемент матрицы, $i -$ номер строки, в которой стоит данный элемент, $j -$ номер соответствующего столбца; m – число строк матрицы, n – число ее столбцов.

Числа m и n называются **размерностями** матрицы.

Матрица называется **квадратной**, если m = n. Число n в этом случае называют **порядком** квадратной матрицы.

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, определяемое единственным образом с использованием всех элементов матрицы. Это число называется определителем.

Определителем второго порядка называется число, полученное с помощью элементов квадратной матрицы 2-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

При этом из произведения элементов, стоящих на так называемой главной диагонали матрицы (идущей из левого верхнего в правый нижний угол) вычитается произведение элементов, находящихся на второй, или побочной, диагонали.

Примеры:

1. $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot 8 - 5\cdot(-3) = 8 + 15 = 23.$ **2.** $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -14 & -8 \end{vmatrix} = 7\cdot(-8) - (-14)\cdot 4 = -56 + 56 = 0.$

Определителем третьего порядка называется число, определяемое с помощью элементов квадратной матрицы 3-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример

Вычислить определитель.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30$$

Линейные операции над матрицами.

Суммой матриц A и B одинаковой размерности $m \times n$ называется матрица C той же размерности, каждый элемент которой равен сумме элементов матриц A и B, стоящих на тех же местах: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1,\ldots,m, j = 1,\ldots,n.$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad C = A + B = \begin{pmatrix} 1-2 & -3+1 \\ 2+3 & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы на число называется матрица той же размерности, что и исходная, все элементы которой равны элементам исходной матрицы, умноженным на данное число.

Пример:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $-4A = \begin{pmatrix} -12 & -8 \\ 20 & -4 \end{pmatrix}.$

Произведением матрицы А размерности m $\times$p и матрицы В размерности $p\times n$ называется матрица С размерности $m\times n$, каждый элемент которой c_{ij} определяется формулой: $c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}, i=1,...,m, j=1,...,n.$ Таким образом, элемент c_{ij} представляет собой сумму произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В.

Пример:
$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -5\\ -2 & 1 & 4\end{pmatrix}$. При этом существует произведение АВ, но не существует произведение ВА. Размерность матрицы С=АВ составляет 2×3. Найдем элементы матрицы С:

$c_{11}=2\cdot3+(-1)(-2)=8, c_{12}=2\cdot1+(-1)\cdot1=1, c_{13}=2\cdot(-5)+(-1)\cdot4=-14,$

$c_{21}=4\cdot3+5\cdot(-2)=2, c_{22}=4\cdot1+5\cdot1=9, c_{23}=4\cdot(-5)+5\cdot4=0.$

Итак, $C=\begin{pmatrix}8 & 1 & -14\\ 2 & 9 & 0\end{pmatrix}.$

Задания для самостоятельного решения:

1. Найти сумму и разность матриц *A* и *B,* где

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 7\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2. Найти C^T, где $\mathrm{C}=\begin{pmatrix}-1 & 23\\ 0 & 45\\ 12 & -7\end{pmatrix}$

3. Найти матрицы:

а*) 2A;*

б) *8B^T^;*

в) *2A+5B;*

г) -3A-7,5B, где

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

4. Найти произведения матриц *AB* и *BA,* где

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}, \mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

5. Найти A^3, где $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

6. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Контрольные вопросы:

1. Сформулировать определение матрицы.
2. Перечислить и пояснить виды матриц.
3. Сформулировать правило умножения матриц
4. Формула для вычисления определителя второго порядка.
5. Формула для вычисления определителя третьего порядка.

Практическая работа № 2

Тема: «Вычисление обратной матрицы»

Цель работы:

- формирование умений находить обратную матрицу.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Определителем второго порядка называется число, полученное с помощью элементов квадратной матрицы 2-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

При этом из произведения элементов, стоящих на так называемой главной диагонали матрицы (идущей из левого верхнего в правый нижний угол) вычитается произведение элементов, находящихся на второй, или побочной, диагонали.

Примеры:

1. $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot 8 - 5\cdot(-3) = 8 + 15 = 23.$

2. $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -14 & -8 \end{vmatrix} = 7\cdot(-8) - (-14)\cdot 4 = -56 + 56 = 0.$

Определителем третьего порядка называется число, определяемое с помощью элементов квадратной матрицы 3-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример1.

Вычислить определитель.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30$$

Алгоритм нахождения обратной матрицы

Пусть задана матрица $A_{n\times n}$. Для того, чтобы найти обратную матрицу A^{-1}, требуется осуществить три шага:

1. Найти определитель матрицы А и убедиться, что $\Delta A \neq 0$, т.е. что матрица А – невырожденная.
2. Составить алгебраические дополнения A_{ij} каждого элемента матрицы А и записать матрицу $A^*_{n\times n}=(A_{ij})$из найденных алгебраических дополнений.
3. Записать обратную матрицу с учетом формулы $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot A^{*T}$

   Матрицу A^{*T} часто именуют присоединённой к матрице А.

Пример 2

Найти обратную матрицу для матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Решение

Вычисляем определитель матрицы А:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (18 - 12) - 7 \cdot (-8 - 0) + 3 \cdot (-12 - 0) = 6 + 56 - 36 = 26$$

Так как $\Delta A \neq 0$, то обратная матрица существует. Находим алгебраические дополнения каждого элемента заданной матрицы:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 6;\ A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8;\ A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -4 & 9 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -12;$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;\ A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2;\ A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 1;\ A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = -16;\ A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} = 37.$$

Составляем матрицу из алгебраических дополнений и транспонируем её:

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -12 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & -16 & 37 \end{pmatrix};\ A^{*T} = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 8 & 2 & -16 \\ -12 & -3 & 37 \end{pmatrix}$$

Используя формулу $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta A} \cdot A^{*T}$, получим:

$$A^{-1} = \frac{1}{26} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 8 & 2 & -16 \\ -12 & -3 & 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/13 & -5/26 & 1/26 \\ 4/13 & 1/13 & -8/13 \\ -6/13 & -3/26 & 37/26 \end{pmatrix}$$

Проверим выполнение равенства $A \cdot A^{-1} = E$. Чтобы поменьше работать с дробями, будем подставлять матрицу A^{-1} не в форме

$$\begin{pmatrix} 3/13 & -5/26 & 1/26 \\ 4/13 & 1/13 & -8/13 \\ -6/13 & -3/26 & 37/26 \end{pmatrix}, \text{ а в виде } \frac{1}{26} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 8 & 2 & -16 \\ -12 & -3 & 37 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{26} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 8 & 2 & -16 \\ -12 & -3 & 37 \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \cdot \begin{pmatrix} 26 & 0 & 0 \\ 0 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Проверка пройдена успешно, обратная матрица A^{-1} найдена верно.

Ответ: $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/13 & -5/26 & 1/26 \\ 4/13 & 1/13 & -8/13 \\ -6/13 & -3/26 & 37/26 \end{pmatrix}$$

Задания для самостоятельного решения:

Вариант 1.

1. Найти матрицу $X = A^{-1} \cdot B$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Вариант 2.

1. Найти матрицу $X = B \cdot A^{-1}$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте алгоритм нахождения обратной матрицы.

Практическая работа №3

Тема: Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы.

Цель работы:

- закрепить навыки решения систем линейных уравнений методом обратной матрицы.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Задание:

Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.

1 вариант

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

2 вариант

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19 \end{cases}$$

3 вариант

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$$

4 вариант

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

5 вариант

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$$

6 вариант

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

7 вариант

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$$

8 вариант

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$$

9 вариант

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$$

10 вариант

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

Контрольные вопросы:

1. Матричная запись системы линейных уравнений.
2. Алгоритм нахождения обратной матрицы.
3. В чем заключается методика решения системы линейных уравнений матричным методом.

Практическая работа №4

Тема «Решение системы линейных уравнений по правилу Крамера».

Цель работы:

- закрепление навыков решения систем линейных уравнений методом Крамера.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Рассмотрим систему трех уравнений с тремя неизвестными :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x = \Delta_1/\Delta; \qquad y = \Delta_2/\Delta; \qquad z = \Delta_3/\Delta$$

где $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$$

$x = \Delta_1/\Delta = 1;$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$y = \Delta_2/\Delta = 2;$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(\ 32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$z = \Delta_3/\Delta = 3.$

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x = y = z = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Задания для самостоятельного решения:

Решите системы линейных уравнений по формулам Крамера.

1 вариант

1) $\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$

2 вариант

1) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 4 \end{cases}$

3 вариант

1) $\begin{cases} 2x + 5y = -7 \\ 3x - y = 15 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6 \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

4 вариант

1) $\begin{cases} 5x + y = 14 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 \quad - 2x_3 = 5 \end{cases}$

5 вариант

1) $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$

6 вариант

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ x - 2y = -9 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

7 вариант

1) $\begin{cases} x - 4y = -1 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$

8 вариант

1) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$

9 вариант

1) $\begin{cases} 4x - 6y = 26 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \\ 3x_2 - 7x_3 = -6 \end{cases}$

10 вариант

1) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=16 \\ 3x-2y-5z=12 \end{cases}$

Контрольные вопросы:

1). Формула для вычисления определителя второго порядка.
2). Формула для вычисления определителя третьего порядка.
3). Условие единственности решения системы уравнений.
4). Условие неопределенности решения системы.
5). Условие несовместности системы уравнений.

Практическая работа №5

Тема: Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Цель работы:

- закрепление навыков решения систем линейных уравнений методом Гаусса.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – он заключается в том, что с помощью элементарных преобразований (перестановка уравнений, умножение уравнения на число, сложение и вычитание уравнений) система уравнений приводится к равносильной системе треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последних по номеру переменных, находятся все остальные переменные.

Пример:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -3 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -3 \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на 2, получим:

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 = 0{,}5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -3 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 3 и из него вычтем второе уравнение; умножим первое уравнение на 4 и из него вычтем третье уравнение; получим:

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 = 0{,}5 \\ -2{,}5x_2 - x_3 = -0{,}5 \\ -3x_2 + x_3 = -5 \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на -2,5 , получим:

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 = 0{,}5 \\ x_2 + 0{,}4x_3 = 0{,}2 \\ -3x_2 + x_3 = -5 \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на -3 и сложим с третьим, получим:

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 = 0{,}5 \\ x_2 + 0{,}4x_3 = 0{,}2 \\ 2{,}2x_3 = -4{,}4 \end{cases}$$

Из последнего уравнения найдем $x_3 = -4{,}4 : 2{,}2 = -2;$
Из второго уравнения найдем $x_2 = 1;$
Из первого уравнения найдем $x_1 = 2.$
Ответ:(2;1;-2)

Задания для самостоятельного решения:

Решите системы линейных уравнений методом Гаусса.

1 вариант

1) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 \quad - 2x_3 = 5 \end{cases}$

2 вариант

1) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$

3 вариант

1) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

4 вариант

1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$ 2)

5 вариант

1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 4 \end{cases}$

6 вариант

1) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6 \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

7 вариант

1) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \\ 3x_2 - 7x_3 = -6 \end{cases}$

8 вариант

1) $\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 16 \\ 3x - 2y - 5z = 12 \end{cases}$

9 вариант

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$

10 вариант

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$

Контрольные вопросы:

1. Объяснить сущность метода Гаусса.

Практическая работа №6

Тема: Вычисление пределов функций в точке и на бесконечности

Цель работы:

- овладение навыками вычисления пределов функций.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Определение Число А называется **пределом функции *y=f(x)*** при *x*, стремящемся к a, если для любой последовательности чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, .x_n, \ldots$ сходящейся к числу a, следует, что последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) \ldots$ сходится к числу А.

Предел функции в точке a обозначается

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Основные теоремы о пределах

1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$

2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$

3. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

4. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

5. $\lim\limits_{x\to a} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n$

6. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

Все правила имеют смысл, если пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ существуют.

Используются также следующие пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$ (первый замечательный предел);

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e=2{,}71828$$ (второй замечательный предел).

Техника вычисления пределов

При вычислении предела элементарной функции *f(x)* приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

- Функция *f(x)* определена в предельной точке $x = a$. Тогда
$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$
- Функция *f(x)* в предельной точке $x = a$ не определена или же вычисляется предел функции при $x\to\infty$. Тогда вычисление предела требует в каждом случае индивидуального подхода.

Необходимо помнить, что
$$\frac{C}{\infty}=0,\ \frac{\infty}{C}=\infty,\ \infty+C=\infty,\ \frac{0}{C}=0,\ \frac{C}{0}=\infty,\ 0+C=C.$$

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда функция *f(x)* в точке $x = a$ или при $x\to\infty$ представляет собой неопределенность (типа $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $1^{\infty}, 0^0, \infty^0$).

При вычислении пределов при $x\to\infty$ основные теоремы о пределах сохраняют силу и, кроме того, используются правила:

а) чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$, необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на наибольшую степень переменной;

б) чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{0}{0}$, необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на наименьшую степень переменной ;

в) чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{0}{0}$, иногда достаточно числить и знаменатель дроби разложить на множители и затем сократить дробь на множитель, приводящий к неопределенности;

г) чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{0}{0}$, зависящую от иррациональности, достаточно перевести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и сократить на множитель, приводящий к неопределенности;

д) чтобы раскрыть неопределенность типа $\infty - \infty$, необходимо числитель и знаменатель дроби одновременно умножить на сопряженное выражение и тем самым свести к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$.

Вычислить пределы функций:

Пример 1: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2}{x^3-1}=\frac{2\cdot 2^2}{2^3-1}=\frac{8}{7}$

Пример 2: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5}{x-1}=\frac{5}{1-1}=\left(\frac{5}{0}\right)=\infty$

Пример 3: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x+4}{1+3x^2-x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+4}{\frac{1}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}-\frac{x^3}{x^3}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x}-1}=\frac{5-\frac{2}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+\frac{3}{\infty}-1}=\frac{5-0+0}{0+0-1}=-5$$

Пример 4: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{1-x^2}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{-(x-1)(x+1)}=$

$$=\left|\begin{array}{c} x^2-3x+2=0 \\ D=3^2-4\cdot 2=1 \\ x_1=\frac{3+1}{2}=2,\quad x_2=\frac{3-1}{2}=1 \end{array}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{-x-1}=\frac{1-2}{-1-1}=\frac{-1}{-2}=0{,}5$$

Пример5: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-2}{3x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4-x}-2)(\sqrt{4-x}+2)}{3x(\sqrt{4-x}+2)}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4-x-4}{3x(\sqrt{4-x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{3x(\sqrt{4-x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{3\cdot(\sqrt{4-x}+2)}=-\frac{1}{12}$$

Пример 6:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 5}\frac{(x^2-25)(2+\sqrt{x-1})}{(2-\sqrt{x-1})(2+\sqrt{x-1})}=\lim_{x\to 5}\frac{(x^2-25)(2+\sqrt{x-1})}{4-(x-1)}=$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)(2+\sqrt{x-1})}{-(x-5)}=-\lim_{x\to 5}(x+5)(2+\sqrt{x-1})=-10\cdot 4=-40.$$

1 – Вариант

Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -2}(4x^5-50x)$

2. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{64-x^2}{x+8}$

3. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+3x-10}{x+5}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3x+2x^3}{x^2+5x}$

5. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

2 – Вариант

Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -2}(2x^4-20)$

2. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x-3}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x^4+3x^2}{-x^2+8x^3}$

5. $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{25-x}{\sqrt{x}-5}$

3 – Вариант

Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x-3}{2x-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{3x+2x^2}$

5. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{16-x}{\sqrt{x}-4}$

4 – Вариант

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-3x^2}{2x^2+5}$

2. $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{49-x^2}{x+7}$

3. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+4x-5}{x+5}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+3x^2}{2x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение предела функции в точке.
2. Сформулируйте основные свойства пределов.
3. Как раскрывается неопределенность вида ${}^{0}\!/_{0}$, ${}^{\infty}\!/_{\infty}$?

Практическая работа №7
Тема: Дифференцирование сложных функций

Цель работы:

- формирование навыков дифференцирования сложных функций.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Определение **Производной функции** $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения ее приращения $\Delta f(x)$ к приращению Δx аргумента x, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} .$$

Если этот предел конечный, то функция *y=f(x)* называется **дифференцируемой** в точке *x*. Если же этот предел есть ∞, то говорят, что функция *y=f(x)* имеет в точке *x* бесконечную производную.

Таблица производных

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

$$(u+v-w)'=u'+v'-w'$$

$$(C\cdot u)'=C\cdot u'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$(C)'=0$$

$$(x)'=1$$

$$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$\left(e^x\right)'=e^x$$

$$\left(a^x\right)'=a^x\ln a$$

$$(\cos x)'=-\sin x$$

$$(\sin x)'=\cos x$$

$$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$$

Процесс нахождения производных называется дифференцированием функции.

Найти производные функций:

Пример 1: $y=3x^2+\sqrt[3]{x^2}+2\sin x+9$

$$y'=\left(3x^2+\sqrt[3]{x^2}+2\sin x+9\right)'=(3x^2)'+(\sqrt[3]{x^2})'+(2\sin x)'+9'=$$

$$=6x+(x^{\frac{2}{3}})'+2\cos x+0=6x+\frac{2}{3}x^{(\frac{2}{3}-1)}+2\cos x=6x+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+$$

$$+2\cos x=6x+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}+2\cos x=6x+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2\cos x$$

Пример2: $y=x^2\cdot\ln x$

$$y'=(x^2)'\cdot\ln x+x^2\cdot(\ln x)'=2x\cdot\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\cdot\ln x+x$$

Пример 3: $y=\dfrac{1+x^2}{5^x}$

$$y'=\frac{(1+x^2)'5^x-(1+x^2)(5^x)'}{5^x}=\frac{2x\cdot 5^x-(1+x^2)\cdot 5^x\ln 5}{(5^x)^2}=$$

$$=\frac{5^x(2x-(1+x^2)\ln 5)}{5^{2x}}=\frac{2x-\ln 5+x^2\ln 5}{5^x}$$

Дифференцирование сложной функции

Пусть *y= y(u)* , где *u= u(x)* – дифференцируемые функции. Тогда сложная функция *y=y[u(x)]* есть также дифференцируемая функция.

Производные сложных функций находятся при помощи таблицы:

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$

$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$

$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$

$(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

Рассмотрим примеры.

Пример 1: Найти производную функции $y = \ln tg5x$

Решение: $y' = (\ln tg5x)' = \dfrac{1}{tg5x}(tg5x)' = \dfrac{1}{tg5x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 5x}(5x)' = \dfrac{\cos 5x}{\sin 5x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5 = \; =$

$$\frac{5}{\sin 5x \cdot \cos 5x} = \frac{5}{\frac{1}{2}\sin 10x} = \frac{10}{\sin 10x}$$

Пример 2: Найти производную функции $y = x\sin^2\sqrt{2x-1}$

Решение: $y' = \left(x\sin^2\sqrt{2x-1}\right)' = x' \cdot \sin^2\sqrt{2x-1} + x \cdot (\sin^2\sqrt{2x-1})' =$

$$= \sin^2\sqrt{2x-1} + x \cdot (2\sin\sqrt{2x-1}) \cdot (\sin\sqrt{2x-1})' =$$

$$= \sin^2\sqrt{2x-1} + 2x \cdot \sin\sqrt{2x-1} \cdot \cos\sqrt{2x-1} \cdot (\sqrt{2x-1})' =$$

$$= \sin^2\sqrt{2x-1} + x \cdot \sin\left(2\sqrt{2x-1}\right) \cdot \frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}} = \sin^2\sqrt{2x-1} +$$

$$+ x \cdot \sin\left(2\sqrt{2x-1}\right) \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \sin^2\sqrt{2x-1} + \frac{x\sin\left(2\sqrt{2x-1}\right)}{\sqrt{2x-1}}$$

Задания для самостоятельного решения:

Вариант 1

Найти производные функций:

1. $y = 2\cdot\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$

2. $y = \dfrac{3^x}{\sin\, x}$

3. $y = \sqrt[7]{(3-14x)^2}$

4. $y = \ln\sqrt{x-1}$

5. $y = 0{,}5^x \cdot ctg2x$

Вариант 2

Найти производные функций:

1. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

2. $y = \dfrac{2^{3x}}{\sqrt{x}}$

3. $y = \dfrac{1}{(3-2x)^3}$

4. $y = e^{\sqrt{3+x}}$

5. $y = \ln\, x \cdot \cos 3x$

Вариант 3

Найти производные функций:

1. $y = x^{-\frac{1}{3}} - 3\sqrt[3]{x}$

2. $y = \dfrac{tg(x-1)}{e^x}$

3. $y = (\dfrac{1}{2}x^2 + 2x)^{-5}$

4. $y = 12 \cdot 4^{\cos 2x}$

5. $y = \sin x^3 \cdot \ln x$

Вариант 4

Найти производные функций:

1. $y = \dfrac{x^6}{6} - \dfrac{2}{x^{-2}}$

2. $y = \dfrac{\cos(8x+4)}{1-x^3}$

3. $y = \dfrac{3}{(1-x)^5}$

4. $y = 0{,}2 \cdot \sin^3(5x + x^2)$

5. $y = e^{-5x} \cdot (9x + x^4)$

Контрольные вопросы:

1. Дать определение производной функции.
2. Как найти производную суммы или разности?
3. Как найти производную произведения?
4. Как найти производную частного двух функций?
5. Сформулируйте правила нахождения производной сложной функции?

Практическая работа №8

Тема: Приложение дифференциала к приближённым вычислениям
Цель работы:

- овладение умениями вычисления приближенного значения функции через дифференциал.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Задание:

1 вариант	2 вариант
№1 Найти дифференциал	
$y=\sin(2x+7)$	$y=e^{3x+4}$
№2 Найти приближенное значение функции:	
$f(x)=3x^3-x^2+5x-1$ при $x=3{,}02$.	$f(x)=x^3-x^2+x-3$ при $x=3{,}03$.
№3 Найти приближенные значения:	
$(3{,}011)^4; \sqrt{1{,}07}; \dfrac{1}{1{,}006}; \sin 4'$.	$(3{,}02)^3; \sqrt{25{,}02}; \dfrac{1}{0{,}997}; tg15'$.

Дополнительно: Найти дифференциалы второго порядка:
1) $y=6x^4-5x^3+4$; 2) $y=e^{-x}$; 3) $y=\ln tg2x$.

Контрольные вопросы:
1) Дать определение дифференциала функции.
2) Как обозначается дифференциал функции?
3) Чему равен дифференциал аргумента?

Практическая работа №9

Тема: Исследование функции. Построение графиков.

Цель работы:
- закрепить навыки исследования функции и построение графика с помощью производной.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники, линейка, карандаш.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Определение производной функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0,

и существует конечный предел отношения $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

Тогда этот предел называется производной функции в точке x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) -}{\Delta x}$$

Производная функции $y = f(x)$ может также обозначаться одним из следующих способов: $f'_x(x_0), y'(x_0), \frac{df}{dx}$.

1. ***Формулы дифференцирования основных функций:***

1. $(x^m)' = m \cdot x^{m-1} \cdot x' = m \cdot x^{m-1}$.

2. $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{1-\frac{1}{2}} \cdot x' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} \cdot x' = -\frac{1}{x^2}$.

4. $\left(e^x\right)' = e^x \cdot x' = e^x$.

5. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a \cdot x' = a^x \ln a$.

6. $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x} \cdot x' = \frac{1}{x}$.

7. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a} \cdot x' = \frac{1}{x \ln a}$.

8. $\left(\sin x\right)' = \cos x \cdot x' = \cos x$.

9. $\left(\cos x\right)' = -\sin x \cdot x' = -\sin x$.

10. $\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot x' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$.

11. $\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot x' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$.

12. $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. *Основные правила дифференцирования*

Пусть $C - const, U = U(x), V = V(x)$, тогда:

1) $C' = 0$;
2) $x' = 1$;
3) $(U \pm V)' = U' \pm V'$;
4) $\left(C \cdot U\right)' = C \cdot U'$;
5) $\left(U \cdot V\right)' = U' \cdot V + U \cdot V'$;
6) $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}$.

7) Если $y = f(U), U = U(x)$, то есть $y = f[U(x)]$, где $f(U)$ и $U(x)$ имеют производные, то $y'_x = y'_u \cdot U'_x$ (правило дифференцирования сложной функции).

Схема исследования функции

1. Найти области определения функции .
2. Вычислить координаты точек пересечения графика с осями координат.
3. Выяснить, на каких промежутках функция возрастает, а на каких убывает.
4. Найти точки экстремума (максимум или минимум), и вычислить значения в этих точках.
5. Построить график функции.

Пример на исследование функции:

Исследуем функцию: $f(x)= 3x^5-5x^3+2$и построим ее график.

Проведем исследование по указанной схеме:

1.D (f) =R, так как f (x) - многочлен.

2.Найдем координаты точек пересечения графика с осями координат:

а) с осью 0X, для этого решим уравнение: $3x^5-5x^3+2 = 0$.

Методом подбора можно найти один из корней (x = 1).Другие корни могут быть найдены только приближенно.

б) с осью 0У: f(0)=2

Точка (0; 2) - точка пересечения графика функции с осью 0У.

3.Найдем промежутки возрастания и убывания функции

а) $f'(x)= 15x^4 -15x^2 = 15x^2 (x^2-1)$

D (f ') =R, поэтому критических точек которых f '(x)не существует, нет.

б) $f'(x) = 0$, если $x^2(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x = -1,\ x = 0,\ x = 1$.

в) Получим три критические точки, они разбивают координатную прямую на четыре промежутка. Определим знак производной на этих промежутках:

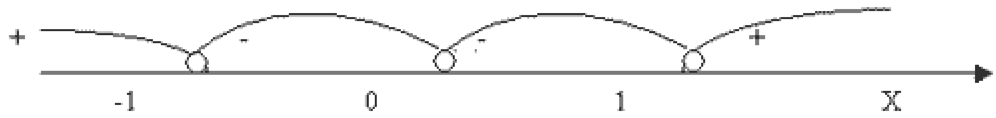


Рис.1 (знаки f ')

Из рисунка 1 видно, что: f возрастает на интервалах (-∞; -1) и(1; +∞);

f убывает на (-1 ; 0) и (0; 1).

Так как функция непрерывна в точках -1; 0; 1, то f возрастает на (-∞; -1] и [1; +∞);

f убывает на [-1; 0] и [0; 1].

4.Найдем точки экстремума функции и вычислим значения функции в этих точках. Рассматривая рисунок 1 знаков f' видим, что:

x =-1 - точка max, f (-1) =4;

x = 1 - точка min, f (1) =0.

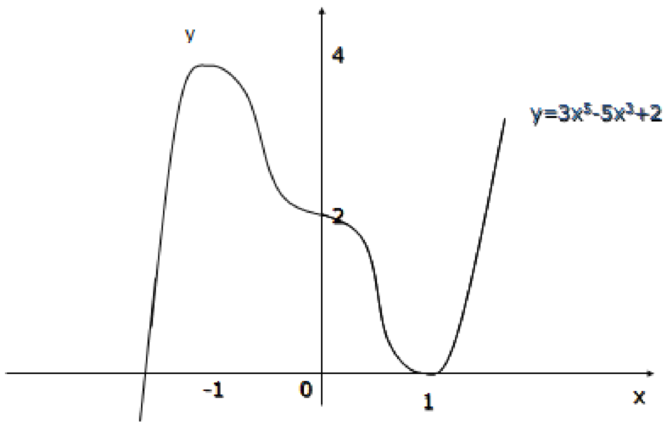
Полученные результаты занесем в таблицу

$f(x)= 3x^5-5x^3+2$

x	(-∞; -1)	-1	(-1; 0)	0	(0; 1)	1	(1; ∞)
f´(x)	+	0	-	0	-	0	+
f(x)	↑	4	↓		↓	2	↑
		max				min	

5. Построим график:

График функции f(x)= $3x^5$-$5x^3$+2



Задание для самостоятельного решения:

ВАРИАНТ 1

Исследовать функцию и построить график

$$f(x) = 2 + 3x - x^3$$

ВАРИАНТ 2

Исследовать функцию и построить график

$$f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$$

ВАРИАНТ 3

Исследовать функцию и построить график

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$$

ВАРИАНТ 4

Исследовать функцию и построить график

$$f(x) = -x^4 + 8x^2 - 16$$

ВАРИАНТ 5

Исследовать функцию и построить график

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$$

ВАРИАНТ 6

Исследовать функцию и построить график

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$$

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте с и поясните схему исследования функции.

Практическая работа №10

Тема: Решение прикладных задач с помощью производной.

Цель работы:

- закрепить навыки решения задач с использованием производной.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники, линейка, карандаш.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Определение 2.1: **Производной функции** $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения ее приращения $\Delta f(x)$ к приращению Δx аргумента x, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} .$$

Если этот предел конечный, то функция *y=f(x)* называется **дифференцируемой** в точке *x*. Если же этот предел есть ∞, то говорят, что функция *y=f(x)* имеет в точке *x* бесконечную производную.

Механический смысл производной: скорость есть первая производная пути по времени, т.е. $v = S'(t)$, ускорение есть вторая производная пути по времени, т.е. $a = S''(t)$

Геометрический смысл производной: тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ равен первой производной этой функции , вычисленной в точке касания, т.е. $tg\alpha = f'(x)$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$y = f(x\ ) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Таблица производных

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$(u + v - w)' = u' + v' - w'$

$(C \cdot u)' = C \cdot u'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(C)' = 0$

$(x)' = 1$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\sin x)' = \cos x$

$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(arcctgx)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

Задания для самостоятельного решения:

ВАРИАНТ 1

1. Найти скорость и ускорение в указанный момент времени для точки, движущейся прямолинейно, если движение точки задано уравнением: $s = t^3 + 5t^2 + 4, \ t = 2$

2. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y = x + 3x^2$ в точке с абсциссой x_o=-1

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ на отрезке [-4;3]

ВАРИАНТ 2

1. Найти скорость и ускорение в указанный момент времени для точки, движущейся прямолинейно, если движение точки задано уравнением:

$$s = 4t^3 + t^2 - 14, \ \ t = 2$$

2. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y = x^2 - 2$ в точке с абсциссой $x_o = 2$.
3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3$ на отрезке $\left[-2;2\right]$

ВАРИАНТ 3

1. Найти скорость и ускорение в указанный момент времени для точки, движущейся прямолинейно, если движение точки задано уравнением:

$$s = t^2 + 11t + 30, \ \ t = 3$$

2. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y = -x^2 + 1$ в точке с абсциссой $x_o = 2$.
3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ на отрезке [-3;2]

ВАРИАНТ 4

1. Найти скорость и ускорение в указанный момент времени для точки, движущейся прямолинейно, если движение точки задано уравнением:

$$s = 2t^3 + t^2 - 4, \ \ t = 4$$

2. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y = 2 + x^2$ в точке с абсциссой $x_o = -1$
3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3$ на отрезке [-2;3]

Контрольные вопросы:

1. Механический смысл производной
2. Геометрический смысл производной
3. Уравнение касательной

4. Уравнение нормали

Практическая работа №11

Тема: Решение прикладных задач с помощью производной и дифференциала.

Цель работы:

- формировать умения использовать производную для решения практических задач.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Применение производной для решения задач

Задача 1

Тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 + t + 1$. Какова кинетическая энергия тела в конце третьей секунды движения после начала движения и сила, действующая на тело?

Дано:

M =4 кг

$x(t) = t^2 + t + 1$

t=3 с

$W_к$? F?

Решение: Скорость $\vartheta(t)$ есть функция времени, поэтому

$\vartheta(t)$ = x’(t)

$\vartheta(t)$ = 2t + 1

$\vartheta(3) = 7$ м/с

В физике скорость изменения скорости называется ускорением.

a(t) = ϑ’(t)

a(t) =2м/с^2

Операция нахождения производной функции называется дифференцированием. С физической точки зрения дифференцирование – определение скорости изменения переменной величины. Производная, таким образом, играет роль скорости изменения зависимой переменной y по отношению к изменению независимой переменной x. Последняя не обязана иметь физический смысл времени.

W = $\frac{m\vartheta^2}{2}$

W = 98 Дж

F = ma

F = 8 Н

Ответ: 98 Дж; 8 Н.

Задача 2

Зависимость между массой вещества M, получаемого в химической реакции и временем t выражается уравнением: $M(t) = At^2 + Bt$, где A и B – постоянные. Какова скорость реакции?

Дано:

$M(t) = At^2 + Bt$

$\vartheta(t)$?

Решение:

Скорость химической реакции определяется: $\vartheta(t)$ = M'(t)

$\vartheta(t)$ = 2 At+ B

Ответ: 2 At+ B

Задача 3

Конденсатор ёмкостью C и зарядом q_0 разряжается через резистор R по закону: $q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$. Найти скорость изменения заряда конденсатора. Какова скорость в начале разряда (t = 0)?

Дано:

$Q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

q'(t) ? q'(0) ?

Решение:

$q'(t) = (q_0 e^{-\frac{t}{RC}})' = q_0 (e^{-\frac{t}{RC}})' \cdot (-\frac{t}{RC})' = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}(-\frac{1}{RC}) = -\frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$

$q'(0) = -\frac{q_0}{RC}$

Ответ: $-\frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$; $-\frac{q_0}{RC}$.

Задание для самостоятельной работы:

Вариант 1

1. Тело массой 2 кг движется прямолинейно по закону $x(t) = 2t^2 + t$. Какова кинетическая энергия тела в конце второй секунды движения после начала движения и сила, действующая на тело?

2. Зависимость между массой вещества M, получаемого в химической реакции и временем t выражается уравнением: $M(t) = 4t^2 - 5t$. Какова скорость реакции?

Вариант 2

1. Тело массой 3 кг движется прямолинейно по закону $x(t) = 3t^2 + 1$. Какова кинетическая энергия тела в конце четвертой секунды движения после начала движения и сила, действующая на тело?
2. Зависимость между массой вещества M, получаемого в химической реакции и временем t выражается уравнением: $M(t) = Ct^3 - At$, где A и C – постоянные. Какова скорость реакции?

Контрольные вопросы

1. Определение производной.
2. Физический смысл производной.

Практическая работа №12
Тема: Нахождение частных производных»
Цель:
- научится находить частные производные.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Задание:
найти частные производные

Задание 1

1 $\sqrt{3y}\log_3 x+\sin(2x+3y)$	2 $\frac{x}{\sin y}+\sqrt{2x}\ln y$	3 $\frac{\log_2(3x)}{2y}$
4 $3arctg(x^2\cdot y^2)$	5 $\sqrt{3y}\ln x+\sin(2x+3y)$	6 $\arcsin(2x^2\cdot y^2)$
7 $\sin(2x^2+3y^2)$	8 $\frac{arctg(3x\cdot y^2)}{3}$	9 $\log_2(3x+2y^2)$

Задание 2

1 $\frac{x}{\sin y}$	2 $3arctg(xy)$	3 $x^3+xy^2-5xy^3+y^5$
4 $\sqrt{2x}\ln y$	5 $2e^{-xy}$	6 $\sin(2x+3y)$
7 $\frac{arctg(xy)}{3}$	8 $\ln(3x+2y)$	9 $\frac{arctg(3xy)}{3}$

Контрольные вопросы:

1 Что такое функция нескольких переменных?

2 Что такое частная производная?

3 Как обозначается частная производная?

4 Что такое полный дифференциал функции?

5 Как найти частную производную?

Практическая работа №13

Тема: Интегрирование простейших функций

Цель:

- закрепление умений находить неопределенные интегралы.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Определение: Функция *F(x)* называется **первообразной для функции *f(x)*,** если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Любая непрерывная функция *f(x)* имеет бесконечное множество первообразных, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

Определение: Совокупность *F(x)+C* всех первообразных для функции *f(x)* называется **неопределенным интегралом** от этой функции и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; 2. $\int f'(x)dx = f(x) + C$;

3. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$; 4. $\int d\big(f(x)\big) = f(x) + C$;

5. $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$; 6. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование предполагает использование при нахождении неопределенных интегралов таблицы интегралов

Таблица интегралов

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\cdot\ln\left|a^2 \pm x^2\right| + C$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\cdot\ln|ax+b| + C$$

$$\int a^{kx+b} dx = \frac{a^{kx+b}}{k\cdot\ln a} + C$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C$$

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

Рассмотрим нахождение интегралов непосредственным методом.

Пример 1: Найти неопределенный интеграл:

$$\int\left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1}\right)dx.$$

Решение: $\int\left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1}\right)dx =$

$$= \int 5\cos x dx + \int 2dx - \int 3x^2 dx + \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{4}{x^2+1}dx =$$

$$= 5\int \cos x dx + 2\int dx - 3\int x^2 dx + \int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= 5\sin x + 2x - 3\frac{x^3}{3} + \ln|x| - 4\cdot arctgx + C =$$

$$= 5\sin x + 2x - x^3 + \ln|x| - 4\cdot arctgx + C.$$

Пример 2: Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{x^2-2}{x^2}dx$.

Решение: $\int \frac{x^2-2}{x^2}dx = \int \frac{x^2}{x^2}dx - \int \frac{2}{x^2}dx = \int dx - 2\int x^{-2}dx =$

$$= x - 2\frac{x^{-1}}{-1} + C = x + \frac{2}{x} + C.$$

Пример 3: Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^2 dx}{x^2+1}$

Решение: $\int \frac{x^2dx}{x^2+1} = \int \frac{(x^2+1-1)dx}{x^2+1} = \int \frac{(x^2+1)dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} =$

$= \int dx - arctgx + C = x - arctgx + C$

Задание для самостоятельной работы.

1 – Вариант

Найти неопределенный интеграл:

1) $\int (2x^5 - 3x^6)dx$

2) $\int (7x + 0{,}3x^{-2})dx$

3) $\int (\sin x + 4 \cdot 2^x)dx$

4) $\int (\sqrt{x} - \frac{3}{x^3})dx$

5) $\int \frac{3x - x^4}{x^2}dx$

2 – Вариант

Найти неопределенный интеграл:

1) $\int (x^2 + 7x^3)dx$

2) $\int (0{,}2x - x^{-2})dx$

3) $\int (4e^x + 2)dx$

4) $\int (\frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x})dx$

5) $\int \frac{x \ \ + 5x^3}{x^4}dx$

3 – Вариант

Найти неопределенный интеграл:

1) $\int (6x^3 - 5x \ \ )dx$

2) $\int (x + 2x^{-7} + 3)dx$

3) $\int (5 - 3\cos x)dx$

4) $\int\left(4\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)dx$

5) $\int\frac{2x^4-xdx}{x^2}$

4 – Вариант

Найти неопределенный интеграл:

1) $\int(4x+3x^2)dx$

2) $\int(2x^{-3}-1)dx$

3) $\int(3e^x+2-4\sin x)dx$

4) $\int\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-\sqrt[3]{x}\right)dx$

5) $\int\frac{x+5}{x^4}dx$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение неопределенного интеграла.

2.Перечислите свойства неопределенного интеграла.

3.Таблица основных интегралов.

Практическая работа №14

Тема: Вычисление интегралов методом заменой переменных и по частям.

Цель:

- овладение методикой вычисления неопределенных интегралов методом замены переменной и по частям.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Метод подстановки в неопределенном интеграле (метод замены переменной)

Этот метод заключается в том, что заменяют переменную x на $\varphi(t)$,где $\varphi(t)$- непрерывно дифференцируемая функция, полагают $dx = \varphi'(t)dt$ и получают

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

При этом получают искомую функцию, выраженную через переменную *t*. Для возвращения к переменной *x* необходимо заменить *t* значением $t = \psi(x)$, которое находится из соотношения $x = \varphi(t)$.

Рассмотрим нахождение интегралов методом подстановки.

Пример 1: Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$

Решение: $\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = \begin{vmatrix} \ln x = t; \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C =$

$$= -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$$

Пример 2: Найти неопределенный интеграл $\int ctgx dx$

Решение: $\int ctgx dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \begin{vmatrix} \sin x = t; \\ dt = \cos dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$

$= \ln|\sin x| + C$

Пример 3: Найти неопределенный интеграл $\int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x}$

Решение: $\int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x} = \begin{vmatrix} e^x = t \\ dt = e^x dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = tgt + C = tge^x + C$

Пример 4: Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{4+25x^2}$

Решение: $\int \frac{dx}{4+25x^2} = \int \frac{dx}{2^2+(5x)^2} = \begin{vmatrix} 5x = t \\ dt = 5dx \\ dx = \frac{1}{5}dt \end{vmatrix} = \int \frac{\frac{1}{5}dt}{2^2+t^2} =$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2} + C = \frac{1}{10} arctg \frac{5x}{2} + C$.

Задание для самостоятельной работы.

1 – Вариант

Найти неопределенный интеграл методом подстановки:

1. $\int \frac{3xdx}{(x^2+9)^2}$

2. $\int 4 \cdot e^{8x^2} \cdot xdx$

Найти неопределенный интеграл методом «интегрирование по частям»:

$$\int x^2 \sin xdx$$

2 – Вариант

Найти неопределенный интеграл методом подстановки:

1. $\int 0{,}5 \cdot e^{3x^2} \cdot xdx$

2. $\int \frac{5xdx}{(x^2-2)^3}$

Найти неопределенный интеграл методом «интегрирование по частям»:

$$\int x \cos xdx$$

3 – Вариант

Найти неопределенный интеграл методом подстановки:

1. $\int\left(\frac{3}{x-3}\right)dx$
2. $\int\sqrt{x^2+3}\ xdx$

Найти неопределенный интеграл методом «интегрирование по частям»:

$$\int x\ln xdx$$

4 – Вариант

Найти неопределенный интеграл методом подстановки:

1. $\int 6\sqrt{x^2+1}\ \ \mathrm{x}dx$

2. $\int\left(\frac{4}{x-1}\right)dx$

Найти неопределенный интеграл методом «интегрирование по частям»:

$$\int\left(4x^3+6x-7\right)\ln xdx$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение неопределенного интеграла.
2. Перечислите свойства неопределенного интеграла.
3. Таблица основных интегралов.
4. Интегрирование методом подстановки.
5. Метод интегрирования по частям.

Практическая работа №15

Тема: Вычисление интегралов дробно-рациональных функций.

Цель:

- овладение методикой вычисления интегралов дробно-рациональных функций.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Задание:

Найти интегралы дробно-рациональных функций

1 $\int \frac{6x+7}{3x^2+7x+4}dx$	2 $\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$	3 $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx$
4 $\int \frac{3x^3+x^2}{x^2+6x+10}dx$	5 $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+3}dx$	6 $\int \frac{2x-3}{x^2-4x+4}dx$
7 $\int \frac{x^2-1}{x^2-x+1}dx$	8 $\int \frac{1+x}{x^2+3x-4}dx$	9 $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^2+5x+6}dx$
10 $\int \frac{3+2x}{x^2+3x-10}dx$	11 $\int \frac{x}{x^2+3x+2}dx$	12 $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx$

Контрольные вопросы

1. Запишите таблицу основных неопределенных интегралов.
2. Какая функция называется дробно-рациональной?
3. Какая дробь называется правильной?
4. Какая дробь называется неправильной?
5. Запишите четыре основных типа простейших дробей и расскажите об их интегрировании.

Практическая работа №16
Тема: Вычисление площадей

Цель:

- закрепить навыки вычисления площадей плоских фигур с помощью определённого интеграла**.**

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники, линейка, карандаш.

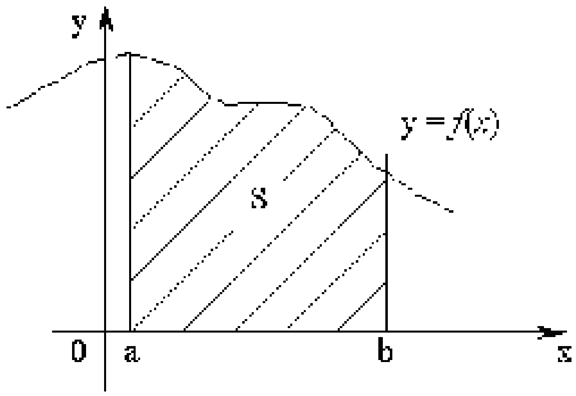
Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Определение. Разность F (b)– F (a) называется интегралом от функции f (x) на отрезке [a ; b] и обозначается так: $\int_a^b f(x)dx$, т.е. $\int_a^b f(x)dx$ = F (b)– F (a) – формула Ньютона-Лейбница.

Геометрический смысл интеграла.



Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке [a ; b] функции f (x), осью Ох и прямыми x=a и x= b:

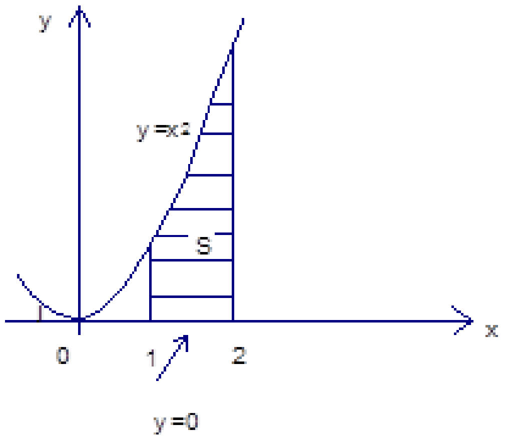
$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(a) - F(b)$$.

Пример 1.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 2.$

Решение.

Искомая площадь:



Формула:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Это общая формула. Конкретно к нашему случаю она применима так:

Пределы интегрирования $a = 1, b = 2, f(x) = x^2$.

$$S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}.$$

Ответ: $\frac{7}{3}$

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [a,b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx.$$

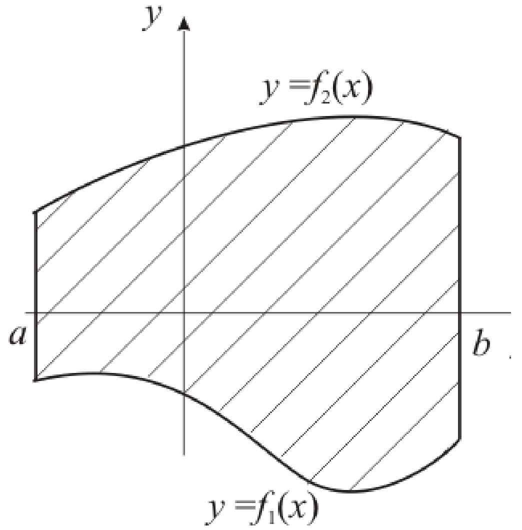


Рис. 1

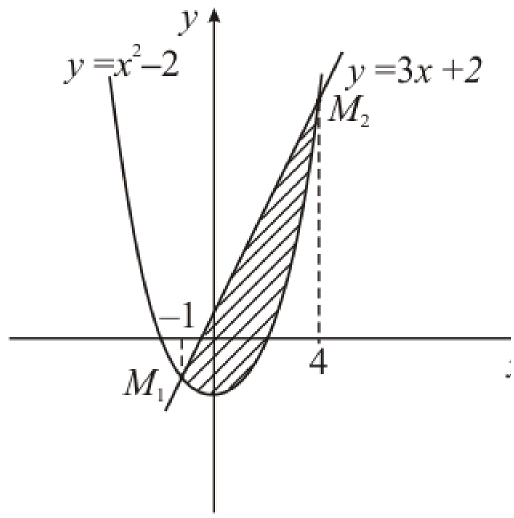


Рис. 2

Приме 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2 - 2, \ y = 3x + 2.$

*Решение***.** Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
y	–2	–1	–1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0, 2)$ и $(-1, -1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \ x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1, \ \ y_2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14.$

Итак, $M_1(-1,-1), \ \ M_2(4,14).$

Площадь полученной фигуры найдем по формуле

$$S=\int\limits_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx.$$, в которой

$$f_2(x)=3x+2,\ \ f_1(x)=x^2-2,$$

поскольку $f_2(x)\geq f_1(x)$ для всех $x\in[-1,4]$.

Получим:

$$S=\int\limits_{-1}^{4}\left(3x+2-\left(x^2-2\right)\right)dx=\int\limits_{-1}^{4}\left(3x-x^2+4\right)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Bigg|_{-1}^{4}=$$

$$=\frac{3\cdot4^2}{2}-\frac{4^3}{3}+4\cdot4-\left(\frac{3\cdot(-1)^2}{2}-\frac{(-1)^3}{3}+4\cdot(-1)\right)=24-\frac{64}{3}+16-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+4=$$

$$=44-\frac{65}{3}-\frac{3}{2}=\frac{125}{6}=20\frac{5}{6}\ (\text{кв.ед.})$$

Задание для самостоятельного решения:

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1. $y=x^3, y=0, x=-2, x=0$
2. $y=x^2, y=0, x=-3, x=0$
3. $y=x^3, y=0, x=-1, x=2$
4. $y=x^3, y=0, x=-1, x=3$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1. $y=x^2-2,\ y=1-2x$
2. $y=x^3,\ \ y=8,\ \ x=0$
3. $y=3x^2+1,\ \ y=3x+6$
4. $y=x^2,\ y=x+1$

Контрольные вопросы:

1. Сформулировать определение определенного интеграла.
2. Сформулировать геометрический смысл определенного интеграла.
3. Записать формулы для вычисления площади плоской фигуры.

Практическая работа №17

Тема: Вычисление объемов тел вращения.

Цель:

- закрепить навыки вычисления объема тела вращения с помощью определённого интеграла**.**

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники, линейка, карандаш.

Порядок выполнения работы:

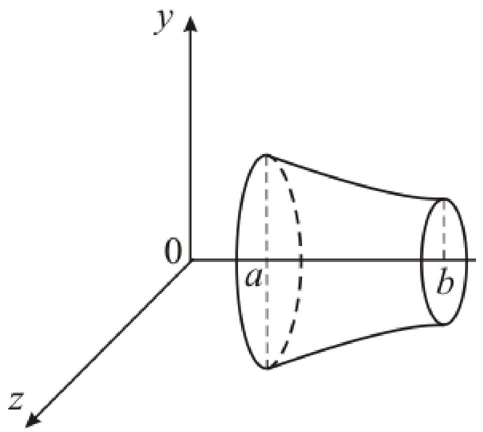
1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Вычисление объемов тел вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью OX и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис.1), то его объем вычисляется по формуле:

$$V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx.$$



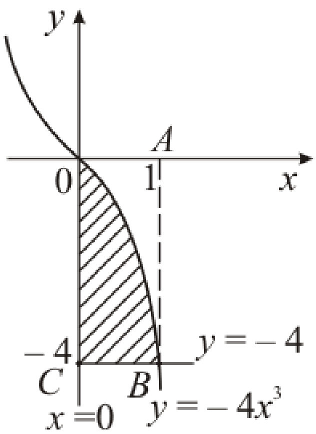


Рис. 1 Рис. 2

Пример. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y=-4x^3,\ x=0,\ \ y=-4.$

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 2).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры $OABC$, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры OAB. Тогда искомый объем $V=V_1-V_2$. По формуле $V=\pi\int\limits_a^b \left(f\left(x\right)\right)^2 dx.$

найдем V_1 и V_2: $V_1=\pi\int\limits_0^1 \left(-4\right)^2 dx=\pi 16x\Big|_0^1=16\pi$ (ед. объема);

$$V_2=\pi\int\limits_0^1 \left(-4x^3\right)^2 dx=16\pi\int\limits_0^1 x^6 dx=16\pi\frac{x^7}{7}=\frac{16\pi}{7}\text{ (ед. объема);}$$

$$V=V_1-V_2=16\pi-\frac{16\pi}{7}=\frac{96}{7}\pi\approx 43{,}085\text{ (ед. объема).}$$

Задание для самостоятельного решения:

Задание . Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями.

1) $x^2-y=0,\quad y=1$

2) $x^2 + y = 0, \quad y = -1$

3) $x - y^2 = 0, \quad x = 1$

4) $y = 4x^3, \quad x = 0, \quad y = -4$

5) $y = 4x^3, \quad x = 1, \quad y = 0$

6) $y = -4x^3, \quad x = -1, \quad y = 0$

Контрольные вопросы:

1. Сформулировать определение определенного интеграла.
2. Записать формулу для вычисления объема тела.

Практическая работа №18
Тема: Приближённое вычисление определённого интеграла.

Цель: -закрепить знания по теме «Формулы прямоугольников, трапеций».

- проверить умения вычислять интеграла по формулам прямоугольников и трапеций.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Приближенное вычисление определённого интеграла:

а) формулы прямоугольников;

б) формула трапеций.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, определённый интеграл от этой функции в пределах от a до b существует и равен

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

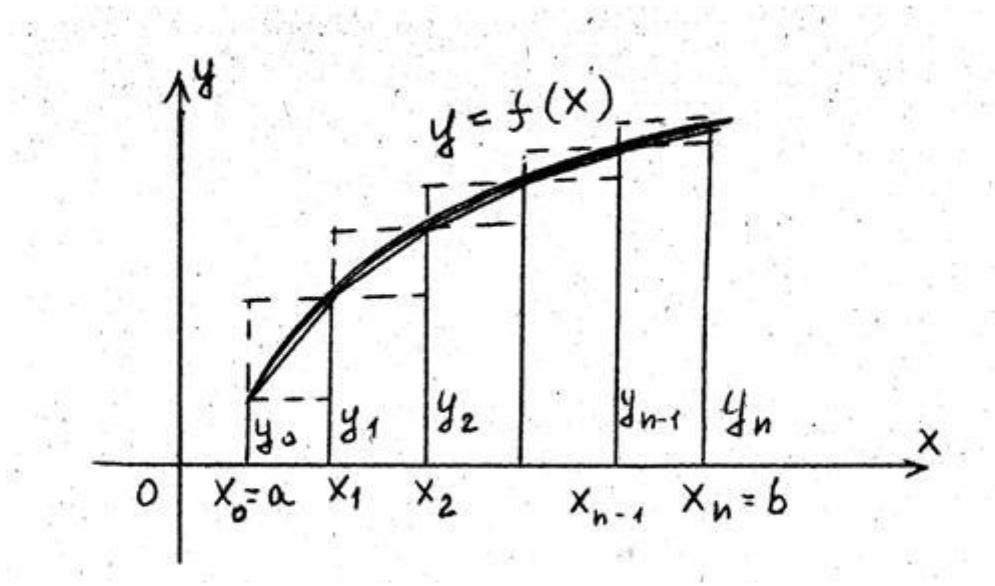
Где $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$.

Для большинства элементарных функций первообразную $F(x)$ не удаётся выразить через элементарные функции. Кроме того, при практических расчётах подынтегральная функция задаётся в виде таблиц. Всё это приводит к необходимости замены интегрирования численными методами.

Задача численного интегрирования состоит в следующем: найти определённый интеграл на $[a,b]$, если подынтегральная функция на отрезке $[a,b]$ задана таблично.

Рассмотрим некоторые формулы приближенного вычисления определённого интеграла.

а) метод прямоугольников.



Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Требуется вычислить определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Разделим отрезок $[a,b]$ точками $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ на n равных частей длины Δx: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Обозначим далее через $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$ значения функции $f(x)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$

Составим суммы:

$$y_0\Delta x + y_1\Delta x + \ldots + y_{n-1}\Delta x$$

$$y_1\Delta x + y_2\Delta x + \ldots + y_n\Delta x$$

каждая из этих сумм является интегральной суммой для $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и поэтому приближенно выражает интеграл

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) \quad \textbf{(1)}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_n\right) \quad \textbf{(2)}$$

Это и есть формулы прямоугольников. Из рисунка видно, что если $f(x)$ - положительная и возрастающая функция, то формула **(1)** (она называется *формулой левых прямоугольников*) выражает площадь ступенчатой фигуры, составленной из «входящих» прямоугольников, а формула **(2)** (*формула правых прямоугольников*) – площадь ступенчатой фигуры, состоящей из «выходящих» прямоугольников.

Ошибка, совершаемая при вычислении интеграла по формуле прямоугольников, будет тем меньше, чем больше число *n* (т. е. чем меньше шаг деления $\Delta x = \frac{b-a}{n}$).

Если подынтегральная функция $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ имеет непрерывную производную $y' = f'(x)$, то для оценки погрешности δ_n при вычислении интеграла $\int_a^b f(x)dx$ по формулам прямоугольников служит неравенство:

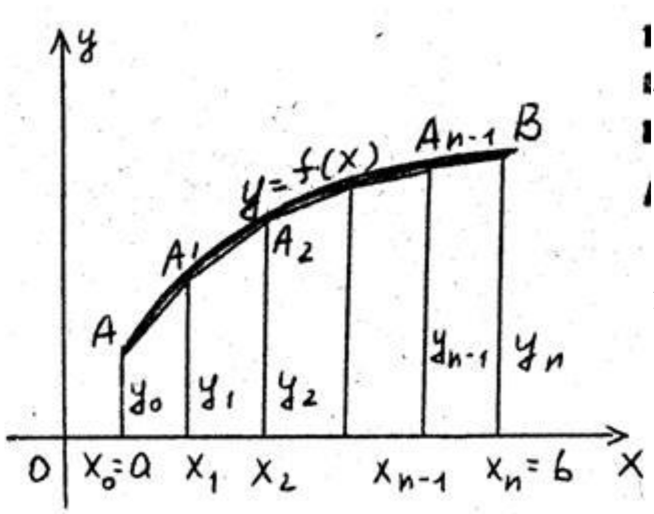
$$|\delta_n| \le \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot M_1$$

где *M1* есть наибольшее значение абсолютной величины производной

$f'(x)$ на отрезке $[a,b]$, т. е. наибольшее значение $|f'(x)|$ на данном отрезке.

б) формула трапеций.

Если данную кривую $y = f(x)$ заменим не ступенчатой линией, как в формуле прямоугольников, а вписанной ломаной, то получим более точное значение определённого интеграла.



Тогда площадь криволинейной трапеции *aABв* заменится суммой площадей прямолинейных трапеций, ограниченных сверху хордами $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}B$,

Так как площадь первой из этих трапеций равна $\frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x$, площадь второй равна $\frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x$ и т. д., то

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\Delta x\right),$$ или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left(y_0 + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + y_n\right) \quad \textbf{(3)}$$

Это и есть формула трапеций. Отметим, что число, стоящее в правой части формулы **(3)** есть среднее арифметическое чисел, стоящих в правых частях формул **(1)** и **(2)**.

Если обозначить $y_0 + y_n = y_{кр}$ (крайние), $(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) = y_{пр}$ (промежуточные), то получим более компактную форму записи

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left(y_{кр} + 2y_{пр}\right) \quad \textbf{(3a)}$$

Полученная приближенная формула оказывается тем более точной, чем больше число *n*.

Ошибка, которую допускаем при вычислении, не превышает

$$\Delta \le \left|\frac{(b-a)^3}{12n^2}M\right|,$$

где M - наибольшее значение $f''(x)$ на отрезке $[a,b]$ или $\Delta \le \frac{b-a}{12}\left|\max \Delta^2 y\right|$, где $\Delta^2 y$ - табличные разности второго порядка.

Пример. Вычислим интеграл по формуле прямоугольников $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, разбив интервал интегрирования на 10 равных частей ($n = 10$). Найдем и запишем в таблицу значения подынтегральной функции y в точках деления:

i	x_i	$y_i =$	i	x_i	$y_i =$
0	0,0	1,00000	6	0,6	0,62500
1	0,1	0,90909	7	0,7	0,58824
2	0,2	0,83333	8	0,8	0,55556
3	0,3	0,76923	9	0,9	0,52632
4	0,4	0,71429	10	1,0	0,50000
5	0,5	0,66667			

По формуле прямоугольников с левыми ординатами получим:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1-0}{10}(y_0 + y_1 + \ldots + y_9) = 0{,}1 \cdot 7{,}18773 = 0{,}71877$$

По формуле прямоугольников с правыми ординатами получим:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1-0}{10}(y_1 + y_2 + \ldots + y_{10}) = 0{,}1 \cdot 6{,}68773 = 0{,}66877$$

Значение, полученное по формуле Ньютона -Лейбница :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 \approx 0{,}693147$$

Мы видим, что формулы прямоугольников дают грубые приближения.

Так как функция y является убывающей на отрезке [0; 1], то формула прямоугольников с левыми ординатами позволяет получить приближенное значение интеграла с избытком, формула прямоугольников с правыми ординатами – с недостатком.

Абсолютную погрешность r формул прямоугольников (2) и (3) можно оценить по формуле:

$$|r| \le \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot M_1, \quad (4)$$

где

$$M_1 = \max_{x\in[a;b]} |f'(x)|.$$

Задание для самостоятельной работы:

Вариант 1

Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ по формуле прямоугольников для n=10.

Вариант 2

Вычислить $\int_0^4 x^2 dx$ по формуле трапеций для n=10.

Контрольные вопросы

1. Формула прямоугольников для вычисления интеграла.
2. Формула трапеций для вычисления интеграла.

Практическая работа №19

Тема: Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Цель работы:

- систематизация знаний по теме;

- закрепление навыков выполнения действий над комплексными числами в алгебраической форме.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Алгебраическая форма комплексного числа имеет вид $z = a + bi$ (a — вещественная часть, bi — мнимая часть комплексного числа).

Комплексное число $\bar{z} = a - bi$ называется *сопряженным* числу $z = a + bi$.

Действия над комплексными числами выполняются по следующим формулам:

$$Z_1 + Z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$Z_1 - Z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 - b_1 a_2)i$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1 \overline{Z_2}}{Z_2 \overline{Z_2}} = \frac{a_1 a_2 - b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

Степени мнимой единицы:

$$i^n = \begin{cases} 1, \text{ если } n \text{ делится на 4 без остатка;} \\ i, \text{если } n \text{ делится на 4 с остатком 1;} \\ -1, \text{если } n \text{ делится на 4 с остатком 2;} \\ -i, \text{если } n \text{ делится на 4 с остатком 3;} \end{cases}$$

Пример 1. Найти разность $Z_1 - Z_2$, если $Z_1 = 9 + 3i$ и $Z_2 = 7 + 8i$

Решение. $Z_1 - Z_2, = (9 + 3i) — (7+ 8i) = (9 — 7) + (3 — 8)i = 2 — 5i.$

Пример 2. Вычислить $\frac{5+3i}{3+2i}$

Решение. $\frac{5+3i}{3+2i} = \frac{(5+3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2I)} = \frac{15-10i+9i+6}{9+4} = \frac{21-i}{13} = \frac{21}{13} - \frac{i}{13}$

Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

Пусть $z = a + bi$ комплексное число. Тогда из рис. 1 находим $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$.

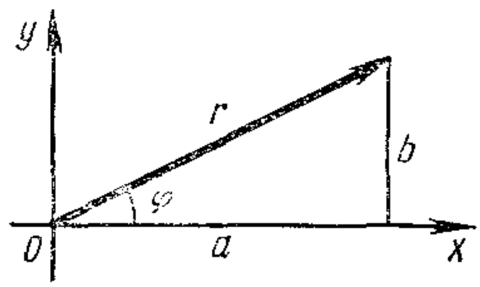


Рис 1

где $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ — модуль числа, а φ его аргумент.

Аргумент находим из системы уравнений :

$$\begin{cases} \sin\varphi = \frac{b}{r} \\ \cos\varphi = \frac{a}{r} \end{cases}$$

Пример 3. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z=-1+\sqrt{3}i$

Решение. Так как,

$a=-1, b=\sqrt{3},$ то $\mathrm{r}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2,$ далее, $\cos\varphi=-\frac{1}{2}, \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решив последнюю систему уравнений, найдем $\varphi=\frac{2\pi}{3}$.

Задания для самостоятельного решения:

Вариант 1

1) Найти сумму и произведение комплексных чисел:

$$Z_1=-7-8i$$
$$Z_2=3-4i$$

2) Найти разность и частное комплексных чисел:

$$Z_1=5+7i$$
$$Z_2=-3-4i$$

3) Выполнить действия: $i^5+i^{10}+i^{12}-i^7$
4) Найти модуль и аргумент комплексного числа (изобразить число геометрически):

$$Z=-15$$

Вариант 2

1) Найти сумму и произведение комплексных чисел:

$$Z_1=-10-8i$$
$$Z_2=7-6i$$

2) Найти разность и частное комплексных чисел:

$$Z_1 = -3 + 4i$$
$$Z_2 = 1 - 4i$$

3) Выполнить действия: $i^{17} + i^9 + i^3 - i^5$
4) Найти модуль и аргумент комплексного числа (изобразить число геометрически):

$$Z = 5i$$

Вариант 3

1) Найти сумму и произведение комплексных чисел:

$$Z_1 = 2 - 3i$$
$$Z_2 = -1 + i$$

2) Найти разность и частное комплексных чисел:

$$Z_1 = -9 + 11i$$
$$Z_2 = -3 - 5i$$

3) Выполнить действия: $i^8 - i^{22} + i^{11} - i^2$
4) Найти модуль и аргумент комплексного числа (изобразить число геометрически):

$$Z = -2\sqrt{3} + 2i$$

Вариант 4

1) Найти сумму и произведение комплексных чисел:

$$Z_1 = 1 + 2i$$
$$Z_2 = 2 - i$$

2) Найти разность и частное комплексных чисел:

$$Z_1 = 2 - 3i$$
$$Z_2 = -1 - 2i$$

3) Выполнить действия : $i^{21} + i^6 + i^9 + i^5$

4) Найти модуль и аргумент комплексного числа (изобразить число геометрически):

$$Z = -4 - 4\sqrt{3}i$$

Контрольные вопросы:

1. Поясните алгебраическую форму записи комплексного числа.
2. Как найти модуль комплексного числа?
3. Как найти аргумент комплексного числа?
4. Геометрическая интерпретация комплексного числа.

Практическая работа №20

Тема: Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Цель работы:

- систематизация знаний по теме;

- закрепление навыков выполнения действий над комплексными числами в тригонометрической форме.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Пусть $z = a + bi$ комплексное число. Тогда $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$.

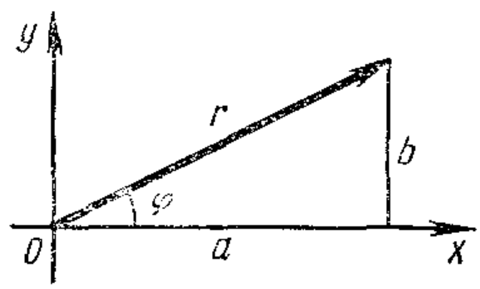


Рис 1

Следовательно,

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - (1) это равенство называется *тригонометрической формой* комплексного числа, где $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ — модуль числа, а φ его аргумент.

$z = re^{\varphi i}$ - (2) *показательная форма* комплексного числа.

Чтобы от алгебраической формы комплексного числа перейти к тригонометрической и показательной форме, нужно сначала найти модуль комплексного числа, а затем из системы уравнений найти его аргумент:

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \end{cases}$$

Пример. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -1 + \sqrt{3}i$, и записать число в тригонометрической и показательной форме.

Решение. Так как,

$a = -1, b = \sqrt{3}$, то $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, далее, $\cos\varphi = -\dfrac{1}{2}, \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Решив последнюю систему уравнений, найдем $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$.

Подставив значения модуля и аргумента в формулы (1) и (2) получим тригонометрическую и показательную форму комплексного числа:

$$z = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3});$$

$$z = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме выполняются по формулам:

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ - и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2));$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2));$$

$$z_1^{\,n} = r_1^{\,n}(\cos n\varphi_1 + i\sin n\varphi_1)$$

Задания для самостоятельного решения:

Вариант 1

1) Записать число в тригонометрической и показательной форме:

$$Z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

2) Найти произведение комплексных чисел:

$$Z_1 = \frac{7}{2}(cos 95^o + i\sin 95^o)$$
$$Z_2 = 2(\cos(-65^o) + i\sin(-65^0))$$

3) Найти частное комплексных чисел:

$$\frac{\left(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}i\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}i\right)}$$

4) Выполнить действия:

$$(4+4i)^5$$

5) Записать число в алгебраической форме:

$$z=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Вариант 2

1) Записать число в тригонометрической и показательной форме:

$$Z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

2) Найти произведение комплексных чисел:

$$Z_1=8(cos15^o+i\sin 15^o)$$

$$Z_2=3(\cos 20^o+i\sin 20^0)$$

3) Найти частное комплексных чисел:

$$\frac{\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{3e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

4) Выполнить действия:

$$(2-2i)^8$$

5) Записать число в алгебраической форме:

$$z=10\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Вариант 3

1) Записать число в тригонометрической и показательной форме:

$$Z = 2 + 2i$$

2) Найти произведение комплексных чисел:

$$Z_1 = 0{,}5(cos17^o + i\sin 17^o)$$
$$Z_2 = 4(\cos 13^o + i\sin 13^0)$$

3) Найти частное комплексных чисел:

$$2\left(cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}i\right) / 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}i\right)$$

4) Выполнить действия:

$$(1 - i)^4$$

5) Записать число в алгебраической форме:

$$z = 8\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)$$

Вариант 4

1) Записать число в тригонометрической и показательной форме:

$$Z = 2\sqrt{3} - 2i$$

2) Найти произведение комплексных чисел:

$$Z_1 = 0.8(cos289^o + i\sin 289^o)$$
$$Z_2 = 5(\cos 101^o + i\sin 101^0)$$

3) Найти частное комплексных чисел:

$$3e^{i\frac{\pi}{3}} / 4e^{i\frac{\pi}{6}}$$

4) Выполнить действия: $(4 - 4i)^7$

5) Записать число в алгебраической форме:

$$z = 16\left(\cos(-\frac{5\pi}{6}) + i\sin(-\frac{5\pi}{6})\right)$$

Контрольные вопросы:

1. Алгебраическая форма записи комплексного числа.
2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа.
3. Показательная форма записи комплексного числа.
4. Модуль комплексного числа.
5. Аргумент комплексного числа
6. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах
7. Возведение в степень комплексного числа.

Практическая работа №21

Тема: Решение прикладных задач на применение комплексных чисел (расчет цепей с применением символического метода).

Цель:

- научиться выполнять расчеты цепей переменного тока с применением комплексных чисел.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

В технике встречаются различные формы переменного тока, однако наиболее распространен сегодня ток переменный синусоидальный, именно такой используется всюду. При помощи него электроэнергия передается, в виде переменного тока она генерируется, преобразуется трансформаторами и потребляется нагрузками. Синусоидальный ток периодически изменяется по синусоидальному (гармоническому) закону.

$$i(t) = I_m Sin(\omega t + \psi_I)$$

$$u(t) = U_m Sin(\omega t + \psi_U)$$

i, u – мгновенные значения тока и напряжения

I_m,, U_m - амплитудные значения тока и напряжения

ψ_I, ψ_U - начальные фазы тока и напряжения

Действующие значения тока и напряжения меньше амплитудных значений в корень из двух раз:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Одним из способов расчета цепей переменного тока является комплексный, или еще как говорят, символический метод расчета. Этот метод применяется при анализе схем с гармоническими ЭДС, напряжениями и токами. В результате решения получают комплексное значение токов и напряжений.

В комплексном методе действующее значение токов и напряжений записывают так:

$$\dot{I} = Ie^{j\psi_I}$$

$$\dot{U} = Ue^{j\psi_U}$$

j – мнимая единица в электротехнике

Из закона Ома определяют комплексное значение сопротивления:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Ze^{j\varphi}$$

$$\varphi = \psi_U - \psi_I$$

Z - модуль комплексного сопротивления

Сложение и вычитание комплексных чисел осуществляется в алгебраической форме, а умножение и деление в показательной форме.

Задание

Определить символическим методом ток в цепи (рис.1), составить баланс мощностей и построить векторную диаграмму.

Данные варианта взять из таблицы1.

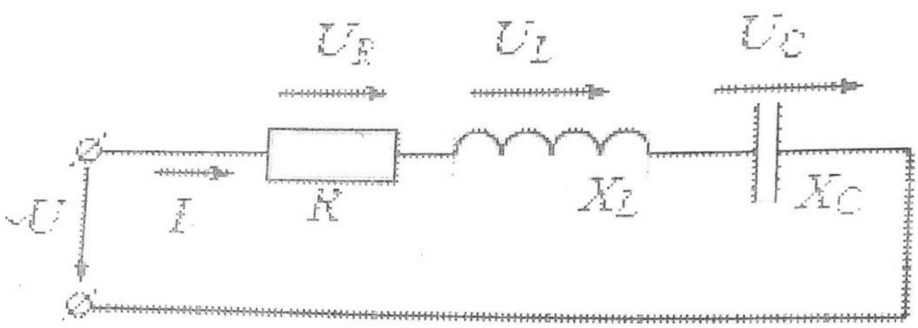


Рис.1

Таблица 1

Вариант	U, В	R, Ом	X_L, Ом	X_C, Ом
1	120	8	12	3
2	60	10	9	6
3	100	10	8	8

Порядок расчета

1. Определить общее сопротивление цепи в комплексной форме.
2. Определить ток цепи (закон Ома в комплексной форме).
3. Определить напряжения U_R, U_L , U_C в комплексной форме.
4. Проверить правильность решения.
5. Построить векторную диаграмму с учетом характеристик нагрузки и масштаба.

Контрольные вопросы

1. Какие формы комплексных чисел вы знаете?
2. Какая форма комплексного числа используется при сложении, умножении, делении?
3. Что такое аргумент и модуль?
4. Построить треугольник сопротивлений.

Практическая работа №22

Тема: Применение комплексных чисел при решении алгебраических задач.

Цель:

- овладение навыками решения квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Комплексным числом z является число вида: $z = a + bi$.

Рассмотрим на примере: $z = \sqrt{-4}$

Если говорить о действительных числах, то, вы знаете, что корень из отрицательного числа нельзя извлекать. Однако в комплексных числах можно. Если конкретнее, 2 корня:

$$z_1 = \sqrt{-4} = -2i$$

$$z_2 = \sqrt{-4} = 2i$$

Выполним проверку:

$$(-2i)^2 = (-2)^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$$

$$(2i)^2 = 2^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$$

Что и требовалось доказать.

Зачастую используют сокращенную запись, корни записывают в одну строчку в таком виде: $.z_{1,2} = \pm 2i$

Такие корни являются **сопряженными комплексными корнями**.

Приведем еще несколько примеров:

$$\sqrt{-1} = \pm i, \quad \sqrt{-9} = \pm 3i,$$

$$\sqrt{-36} = \pm 6i,$$

$$\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i,$$

$$\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}i$$

и т.д.

В каждом случае получаем 2 сопряженных комплексных корня.

Пример:

Решим квадратное уравнение $z^2 - 6z + 34 = 0$.

Первым шагом определим дискриминант уравнения:

$$D = 36 - 136 = -100$$

Дискриминант оказался отрицательным, и в случае с действительными числами у уравнения нет решений, но у нас вариант с комплексными числами, поэтому можем продолжать решение:

$$\sqrt{D} = \pm 10i$$

Как известно из формул дискриминанта у нас образуется 2 корня:

$$z_{1,2} = \frac{6 \pm 10i}{2}$$

$z_{1,2} = 3 \pm 5i$ – сопряженные комплексные корни

Т.о., у уравнения $z^2 - 6z + 34 = 0$ есть 2 сопряженных комплексных корня:

$$z_1 = 3 - 5i,$$

$$z_2 = 3 + 5i$$

Задания для самостоятельного решения:

1 Вариант

1.Решить квадратное уравнение

а) $x^2 + 2x + 26 = 0$

б) $x^2 - 2x + 5 = 0$

2.Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (3 - i)x + (4 + 2i)y = 2 + 6i \\ (4 + 2i)x - (2 + 3i)y = 5 + 4i \end{cases}$$

2 Вариант

1.Решить квадратное уравнение

а) $x^2 - 4x + 5 = 0$

б) $x^2 + 2x + 3 = 0$

2.Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (2 - i)x + (3 + 2i)y = 3 - 6i \\ (1 - i)x - (2 + i)y = -1 \end{cases}$$

Контрольные вопросы:

1. Алгебраическая форма записи комплексного числа.
2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа.
3. Показательная форма записи комплексного числа.
4. Модуль комплексного числа.
5. Аргумент комплексного числа.

Практическая работа №23

Тема: Решение дифференциальных уравнений 1 порядка.

Цель:

- закрепление умений решать дифференциальные уравнения первого порядка.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Уравнение вида *f(x)dx + g(y) dy=0* называется уравнением с разделяющимися переменными.

Решение такого уравнения можно найти непосредственным интегрированием.

Таблицы основных интегралов

1. $\int dx = x + C$ 2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ 4. $\int e^x dx = e^x + c$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$ 8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$ 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

Примеры решения уравнений.

Рассмотрим пример решения дифференциального уравнения:

1). *xdx + ydy=0*

Решение:

Переменные здесь разделены. Интегрируя, получим:

xdx = - ydy

$$\int xdx = -\int ydy$$

$$\frac{x^2}{2} + C = -\frac{y^2}{2}$$

2). *(y +1)dx=(x-1)dy*

Решение:

Разделим обе части уравнения на *(y +1)(x-1)*, получим:

$$\frac{dx}{x-1} = \frac{dy}{y+1}$$

Теперь интегрируем:

$$\int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{dy}{y+1}$$

$$\ln(x-1) + C = \ln(y+1)$$

Так как C произвольно, можно положить C=lnC, то получим:

ln(x-1)+lnC=ln(y+1)

$lnC(x-1)=ln(y+1)$

$Cx-C=y+1$

$y=Cx-C-1$

Задание для самостоятельной работы:

1 вариант

1. $2dy\sqrt{x}=ydx$
2. $x^2dy=y^2dx$
3. $(x+2)dx=y^4dy$

2 вариант

1. $xdy=ydx$
2. $\sqrt{x}dy=\sqrt{y}dx$
3. $y^2dx+(x-2)dy=0$

3 вариант

1. $x^3dy=y^3dx$
2. $\frac{dy}{\sqrt{x}}=\frac{3dx}{\sqrt{y}}$
3. $xydx=(1+x^2)dy$

Контрольные вопросы:

1. Определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
2. Табличные интегралы.

Практическая работа №24

Тема: Решение дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Цель:

- формирование умений решать дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Обеспечение практической работы: методические указания для практической работы, средства вычислительной техники.

Порядок выполнения работы:

1. Записать в тетрадь тему и цели практической работы.
2. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
3. Ознакомиться с методикой решения задач.
4. Решить задачи самостоятельно.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Сведения из теории:

Определение дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Уравнение вида $y''+py'+qy=0$ называется дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Для решения такого уравнения составляется характеристическое уравнение, заменив в уравнении y'', y' и y на k^2, k, 1 соответственно. Таким образом необходимо решить уравнение $k^2+p\,k+q=0$.

Три случая решения уравнения:

1 случай. Корни характеристического уравнения действительные и разные по величине. Тогда исходное уравнение будет иметь два линейно независимых частных решения:

$$y = e^{k_1 x}$$
$$y = e^{k_2 x}$$

А общее решение будет $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

2 случай. Корни характеристического уравнения действительные и равные по величине. Тогда исходное уравнение будет иметь два линейно независимых частных решения:

$$y = e^{k_1 x}$$
$$y = x e^{k_2 x}$$

А общее решение будет $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_2 x}$

3 случай. . Корни характеристического уравнения комплексные, а именно

$k_1=a+bi$, $k_2=a-bi$. Тогда исходное уравнение будет иметь два линейно независимых частных решения:

$$y = e^{(a+bi)x}$$
$$y = e^{(a-bi)x}$$

А общее решение будет $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$

Пример решения уравнения.

Рассмотрим пример решения дифференциального уравнения:

y´´- 6y´+13y=0

Решение:

Составим характеристическое уравнение

$k^2 -6k+13=0$

Оно имеет корни $k_1=3+2i$ и $k_2=3-2i$

Следовательно частными решениями будут^

$y = e^{(3-2i)x} \quad y = e^{(3+2i)x}$

Общим решением будет :

$$y = e^{3x}(C_1 cos2x + C_2 sin2x)$$

Задание для самостоятельной работы:

1 вариант

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' + 4y' + 4y = 0$
3. $y'' - 4y' + 13y = 0$

2 вариант

1. $y'' - 5y' + 4y = 0$
2. $y'' - 6y' + 9y = 0$
3. $2y'' - 3y' + 4y = 0$

Контрольные вопросы.

1. Определение дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.
2. Три случая решения уравнения дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

4.Список используемой литературы и интернет ресурсы.

1. Григорьев С.Г. Математика: учебник для студентов сред. проф. учреждений / С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина/ под ред. В.А. Гусева. – 13-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2020. – 416 с:
2. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов [Электронный ресурс] / Режим доступа: www.fcior.edu.ru
3. Математика в Открытом колледже http://www.mathematics.ru
4. Общероссийский математический портал http://www.mathnet.ru
5. Московский центр непрерывного математического образования (МЦНМО) http://www.mccme.ru
6. Вся математика в одном месте http://www.allmath.ru
7. Образовательный математический сайт Exponenta.ru http://www.exponenta.ru
8. Электронная библиотека Издательский центр «Академия».