Филиал Государственного бюджетного профессионального образовательного учреждения

«Троицкий технологический техникум» в с. Октябрьское

СОГЛАСОВАНО
Руководитель ЦМК
______Беспалова И.В

«_____»_____2024__

Комплект
оценочных средств по учебной дисциплине
ООД.07 Математика

Основной профессиональной образовательной программы (ОПОП)
по профессии СПО
09.01.03 Оператор информационных систем и ресурсов

Разработчик: Зоркина Г. П.
Преподаватель высшей
квалификационной категории
ГБПОУ «Троицкий
технологический техникум»

с. Октябрьское, 2024

Содержание

1. Паспорт комплекта оценочных средств

1.1. Область применения комплекта оценочных средств

Комплект оценочных средств предназначен для проверки результатов освоения учебной дисциплины ООД.07 Математика основной профессиональной образовательной программы (далее ОПОП) по профессии 09.01.03 Оператор информационных систем и ресурсов

Комплект оценочных средств позволяет оценивать:

1. Формирование элементов профессиональных компетенций (ПК) и элементов общих компетенций (ОК):

Профессиональные и общие компетенции	**Показатели оценки результата**	**Средства проверки (№ заданий)**
1	2	3
ПК 1.4 Овладеть математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для освоения смежных дисциплин и дисциплин профессионального цикла	умение владение стандартными приемами; использование готовых компьютерных программ.	Работа на практических занятиях № 1-12 Результаты экзамена
ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам	Умение владеть методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач. Умение выявлять причинно-следственные связи и	Работа на практических занятиях № 1-12 Результаты экзамена

	актуализировать задачу, выдвигать гипотезу ее решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений, задавать параметры и критерии решения; - анализировать полученные в ходе решения задачи результаты, критически оценивать достоверность, прогнозировать изменение в новых условиях; ,	
ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности	Овладение универсальными учебными познавательными действиями: в) работа с информацией: - владеть навыками получения информации из источников разных типов, самостоятельно осуществлять поиск, анализ, систематизацию и интерпретацию информации .	Работа на практических занятиях № 1-12 Результаты экзамена
ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде	- готовность вести совместную деятельность в интересах гражданского общества, участвовать в самоуправлении в образовательной организации - позитивное стратегическое	Работа на практических занятиях № 1-12 Результаты экзамена

	поведение в различных ситуациях, принимать мотивы и аргументы других людей при анализе результатов деятельности.		

2. Освоение умений и усвоение знаний

Освоенные умения, усвоенные знания	**Показатели результата**	**№ заданий для проверки**
Умение владеть методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач. - владение навыками учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем. умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики .	Овладение универсальными учебными познавательными действиями: а) базовые логические действия: - самостоятельно формулировать и актуализировать проблему, рассматривать ее всесторонне; - устанавливать существенный признак или основания для сравнения, классификации и обобщения; - определять цели деятельности, задавать параметры и критерии их достижения; - выявлять закономерности развитие креативного мышления при решении проблем б) базовые исследовательские действия: - выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, совершенствование умений выдвигать гипотезу ее решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений, задавать параметры и критерии решения; - анализировать полученные в	Задание №1.1 Задание №1.2

	ходе решения задачи результаты, критически оценивать их достоверность, прогнозировать ,	
. умение грамотно пользоваться универсальными учебными познавательными действиями: работа с информацией: - владеть навыками получения информации из источников разных типов, самостоятельно осуществлять поиск, анализ, систематизацию и интерпретацию.	- совершенствование умений владеть навыками получения информации из источников разных типов, самостоятельно осуществлять поиск, анализ, систематизацию и интерпретацию информации различных видов и форм представления; - создавать тексты в различных форматах с учетом назначения информации и выбирать оптимальную форму представления и визуализации; - оценивать достоверность, легитимность информации, ее соответствие правовым и морально-этическим нормам; обобщение знаний - информационных и коммуникационных технологий в решении когнитивных, коммуникативных и организационных задач с соблюдением требований эргономики, техники безопасности, гигиены, ресурсосбережения, правовых и этических норм, норм информационной безопасности;	Задание №1.1 Задание 1.2 Задание №1.3-1.6 Задание №17-.-1.8

Умениеорганизовывать работу коллектива и команды;взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами в ходе профессиональной деятельности Знания:психологические основы деятельности коллектива, психологические особенности личности; основы проектной деятельности.	совершенствование уменийпринимать цели совместной деятельности, организовывать и координировать действия по ее достижению: составлять план действий, распределять роли с учетом мнений участников обсуждать результаты совместной работы; - координировать и выполнять работу в условиях реального, виртуального и комбинированного взаимодействия; - осуществлять позитивное стратегическое поведение в различных ситуациях, проявлять творчество и воображение, быть инициативным. совершенствование умений универсальными регулятивными действиями: г) принятие себя и других людей: - принимать мотивы и аргументы других людей при анализе результатов деятельности; - признавать свое право и право других людей на ошибки.	Задание2.1 Задание 2.2-2.5 «

1.2 Система контроля и оценки освоения программы учебной дисциплины

1.2.1. Формы промежуточной аттестации по УД

	Формы промежуточной аттестации

ООД.07Математика	экзамен

1.2.2. Организация текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения программы учебной дисциплины

Текущий контроль знаний и промежуточная аттестация является основным механизмом оценки качества подготовки обучающихся по дисциплине ООД.03 Математика в соответствии с требованиями ФГОС СПО. Промежуточная аттестация обучающихся проводится в сроки, предусмотренные рабочим учебным планом.

Текущий контроль по УД проводится в пределах учебного времени, отведенного на дисциплину.

В начале изучения дисциплины проводится входной контроль с целью проверки уровня предварительных знаний обучающихся на начальном этапе освоения дисциплины.

Данные текущего контроля используются преподавателем для эффективной учебной работы обучающихся, своевременного выявления отстающих и оказания им содействия в изучении учебного материала, совершенствования методики преподавания дисциплины.

Промежуточная аттестация является обязательной. Она проводится в установленные учебным планом сроки по окончании освоения программы дисциплины «Математика» промежуточная аттестация оценивает результаты учебной деятельности обучающихся за 4 семестра обучения.

2. Задания для контроля и оценки освоения программы учебной дисциплины

2.1. Задание для текущего контроля

Контрольная работа 1

1. Решить уравнение $x\ (x - 5) = - 4$

а) 4 и 1; б) 4,5; в) 4; г) – 4 и 1; д) 1.

2. Решите неравенство $6x - 3 < (x - 5)$

а) $x > - 4$; г) $x < 4$; д) $x < -0{,}4$

3. Вычислить $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right):(1-0{,}2)-3\frac{23}{24}$.

а) $3\frac{11}{12}$; б) 3,9; в) $-3\frac{11}{12}$; г) 4; д) $2\frac{11}{12}$.

4.Представить в виде степени и найти значение выражения $\frac{a^5 \cdot a^{-8}}{a^{-2}}$ при $a = 6$.

а) 6; б) $-\frac{1}{6}$; в) 4; г) – 6; д) $\frac{1}{6}$.

5. Построить график функции $y = 2x + 1$.

В 6. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 10 см, а один из катетов

6 см. Найти второй катет.

а) 4 см; б) 16 см; в) 8 см; г) √136 см; д) 10 см.

В 7. Банк выплачивает ежегодно 8% от суммы вклада. Какой станет сумма через

год, если первоначальный вклад составлял 7600 рублей?

С8.Упростить выражение $\frac{a}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}$.

2 вариант

А1. Решить уравнение $x\,(x - 4) = -3$

а) 3 и 1; б) 4,5; в) 3; г) – 3 и 1; д) 1.

А2. Решите неравенство $5 \cdot (x + 4) > (x - 4)$

а) $x < -10$; г) $x > 0{,}6$; д) $x > -6$

А3. Вычислить $\left(\frac{5}{7} : \frac{2}{3} - \frac{1}{\frac{4}{3} - \frac{2}{5}}\right) : \frac{8}{11} + 1$.

а) $\frac{15}{14}$; б) 1; в) $-3\frac{11}{12}$; г) - 1; д) $2\frac{11}{12}$.

А4.Представить в виде степени и найти значение выражения $\frac{c^7 \cdot c^{-3}}{c^6}$ при $c = 4$.

А5. Построить график функции $y = -2x + 1$.

В6. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 10 см, а один из катетов

8 см. Найти второй катет.

а) 4 см; б) 6 см; в) 8 см; г) √136 см; д) 10 см.

В7. Банк выплачивает ежегодно 8% от суммы вклада. Какой станет сумма через

год, если первоначальный вклад составлял 8600 рублей?

С8.Упростить выражение $\frac{x-y}{x+y}-\frac{y}{x-y}$.

Таблица правильных ответов

Задания	А1	А2	А3	А4	А5	В6	В7	С8
1 вариант	*а*	д	в	д		в	*а*	$\frac{b(3a-b)}{a^2-b^2}$
2 вариант	*а*	г	б	д		б	в	

Контрольная работа 2

Вариант 1	Вариант 2
Прямая a параллельна плоскости α, прямая b также параллельна плоскости α. Могут ли a и b: а) Быть параллельными? б) Пересекаться? в) Быть скрещивающимися прямыми? Точка М лежит вне плоскости параллелограмма ABCD. а) Докажите, что средние линии треугольников MAD и MBC параллельны. б) Найдите эти средние линии, если боковая сторона параллелограмма равна 5, а его высота равная 4 и делит сторону, к которой проведена, пополам. Плоскость α пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках M и	Прямая a пересекает плоскость α, прямая b также пересекает плоскости α. Могут ли a и b: а) Быть параллельными? б) Пересекаться? в) Быть скрещивающимися прямыми? Треугольник ABC и трапеция KMNP имеют общую среднюю линию EF, MN‖EF, EF‖BC. а) Докажите, что BC‖ KP. б) Найдите KP и MN, если BC=24, KP:MN = 8:3. Плоскость α проходит через сторону AB треугольника ABC. Прямая пересекает стороны BC и AC в точках M и N соответственно. MC:BC=6:13, NC:AN=6:7. а) Докажите, что MN ‖ α.

N соответственно. BN:NC=5:8. MB:AB=5:13. а) Докажите, что AC ‖ α. б) Найдите MN, если AC=26. Через вершину C квадрата ABCD, проходит прямая CK, не лежащая в плоскости квадрата. а) Докажите, что CK и AD скрещивающиеся. б) Чему равен угол между CK и AD. Угол CBK равен 45 градусов, угол CKB равен 75 градусов?	б) Найдите MN, если AC=39. Точка F лежит вне плоскости трапеции ABCD. а) Докажите, что AF и BC скрещивающиеся. б) Чему равен угол между AF и BC, если угол AFD равен 70 градусов, угол FDA равен 40 градусов?

Контрольная работа 3

Координаты и векторы

Точка A — середина отрезка MK. Найдите координаты точки A и длину отрезка MK, если M (5; −2; 1), K (3; 4; −3).

2. Точки A и B симметричны относительно точки C. Найдите координаты точки B, если A (−3; 5; −7), C (6; 2; −1).

3. Даны векторы $\vec{a}$ (3; −2; −1) и $\vec{b}$ (1; 2; 4). Найдите:

1) координаты вектора $\vec{m}=-3\vec{a}+2\vec{b}$;

2) косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4. Даны векторы $\vec{a}$ (2; −6; 8) и $\vec{b}$ (−1; k; −4). При каком значении k векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

1) коллинеарны;

2) перпендикулярны?

5. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой AB, если A (1; 2; −3), B (4; 8; −6).

6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1 см. На диагонали C_1D его грани отметили точку M так, что $DM : MC_1 = 5 : 3$.

Вариант 2

1. Точка M — середина отрезка AB. Найдите координаты точки M и длину отрезка AB, если A (6; −5; 2), B (−4; 3; 10).

2. Точки M и K симметричны относительно точки D. Найдите координаты точки K, если M (4; −6; 3), D (−2; 1; 5).

3. Даны векторы $\vec{m}$ (2; −1; 3) и $\vec{n}$ (−1; 2; 5). Найдите:

1) координаты вектора $\vec{a} = -2\vec{m} + 3\vec{n}$;

2) косинус угла между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

4. Даны векторы $\vec{m}$ (5; −4; 6) и $\vec{n}$ (15; −12; p). При каком значении p векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$:

1) коллинеарны;

2) перпендикулярны?

5. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку B и перпендикулярной прямой BC, если B (3; −2; 4), C (−2; 8; 19).

6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1 см. На диагонали AD_1 его грани отметили точку E так, что $AE : ED_1 = 2 : 7$.

Контрольная работа 4

Основы тригонометрии. Тригонометрические функции

Вариант 1	Вариант 2
Вычислите: $3\cos 60 + 2\sin 30^\circ$ Найдите значение выражения: $\mathrm{tg}\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4}$ Из предложенных формул выберите верную: 1)$\sin^2 x - \cos^2 x = 1$2) $\mathrm{tg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$ 3) $\mathrm{ctg}\, x \cdot \mathrm{tg}\, x = 1$4) $1 + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ Упростите выражение: $1 - \sin x\cos x\,\mathrm{tg} x$ и найдите его значение при $x = \frac{\pi}{3}$ Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ и $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ Упростите выражение $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x$ и найдите его значение	Вычислите: $2\cos 0^\circ - 4\sin 30^\circ$ Найдите значение выражения: $\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}$ Из предложенных формул выберите верную: 1)$1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$2) $\frac{\cos x}{\sin x} = \mathrm{ctg}\, x$ 3) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$4) $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = 1$ Упростите выражение: $(\sin x + 1)(1 - \sin x)$ и найдите его значение при $x = \frac{\pi}{6}$ Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ и $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ Упростите выражение $\frac{2\sin^2 x - 2}{\cos^2 x}$ и найдите его значение при $x = \frac{\pi}{8}$

при $x = \frac{\pi}{12}$ Вычислите: sin (– 1110°) + 2tg $\left(-\frac{33\pi}{4}\right)$: $\cos 4\alpha + 1 = \frac{1}{2}\sin 4\alpha(ctg\alpha - tg\alpha)$	Вычислите: ctg (– 765°) – 2cos $\left(-\frac{19\pi}{3}\right)$ Докажите тождество: $(tg\alpha + ctg\alpha)(1 - \cos 4\alpha) = 4\sin 2\alpha$

Контрольная работа 5

«Производная. Применение производной

Вариант 1.

1.. Найдите производную функции:

а) $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{x}$; б) $y=-\frac{1}{6}x^3+6\sqrt{x}$; в) $y=4x^2+\cos x$

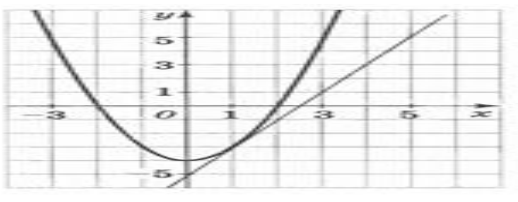
2.. Вычислите $f'(-2)$, если $f(x)=-x^3+\frac{1}{4}x^2$

3..Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции :

$y=2+ctgx$ в точке $x_0=\frac{\pi}{6}$

4..Точка движется по координатной прямой по закону $x(t)=3t^3-2t^2-7$, где $x(t)$ - координата точки (в метрах) в момент времени t (в секундах). Найдите скорость точки через 3 с после начала движения.

5..На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0=1$. Найдите $f'(x_0)$.



6. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2-4x-1$, в точке с абсциссой $x_0=-3$.

7. Найдите производную функции: $y=-3\cos(8-2x)$.

Вариант 2.

1.. Найдите производную функции:

а) $y=\frac{1}{9}x^{6}-\frac{7}{x}$; б) $y=5x^3+2\sqrt{x}$; в) $y=-3x^3-2\cos x$

2.. Вычислите $f'(-2)$, если $f(x)=2x^3-\frac{1}{2}x^2+x$

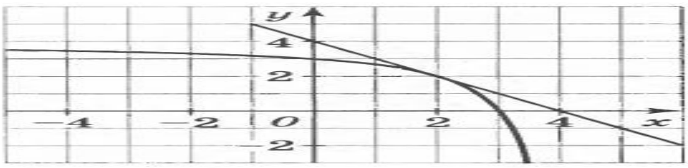
3..Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции:

$y=3-2\,tgx$ в точке $x_0=\frac{\pi}{3}$

4..Точка движется по координатной прямой по закону

$x(t)=t^3-2t^2+t-41$, где $x(t)$ - координата точки (в метрах) в момент времени t (в секундах). Найдите скорость точки через 2 с после
начала движения.

5..На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0=2$. Найдите $f'(x_0)$.



6. Составьте уравнение касательной к графику функции
$f(x)=3x^2+2x-3$, в точке с абсциссой $x_0=-4$.

7. Найдите производную функции: $y=4s\in(2-3x)$

Контрольная работа 6.

Многогранники и тела вращения

Задача: У параллелепипеда три грани имеют площади *2м²*, *4 м²* и *5 м²*. Чему равна полная поверхность параллелепипеда?

Задача: Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами *9* и *12 см*, все боковые рёбра равны *12,5 м*. Найдите объём пирамиды.

Задача: Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна *7 см*, а сторона основания *8 см*. Найдите боковое ребро.

Задача: Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами *6 см* и *8 см*. Каждое боковое ребро пирамиды равно *13 см*. Вычислите высоту пирамиды.

Задача: Куча щебня имеет коническую форму, радиус основания которой 4 м , а образующая 5 м. Найдите объём щебня.

Задача: Найти площадь сечения шара радиусом 25 см плоскостью, проведённой на расстоянии 20 см от центра шара.

Задача: Объём шара равен 288π см^3. Найдите площадь поверхности шара.

Задача: Площадь боковой поверхности конуса равна 15π см^2, а площадь его основания на 6π см^2 меньше. Найдите объём конуса.

Задача: Радиус цилиндра равен 5 см, площадь боковой поверхности вдвое больше площади основания. Найдите объём цилиндра.

Задача: Плоскость проходит на расстоянии 6 см от центра шара. Радиус сечения равен 8 см. Найдите площадь поверхности шара.

Контрольная работа 7

Первообразная функции, ее применение

1.Найдите общий вид первообразных: $f(x) = 2x – 5$ на R $f(x) = x^7 – 2 \sin x$ на R $f(x) = 2x^5-4x+3$ на R 2. Вычислите F(b) – F(a), если $f(x) =3x^2 – 2x$; $a=\frac{2}{3}$; $b=-\frac{2}{3}$. 3. Вычислите площадь фигуры ограниченной: а) графиком функции $f(x) =6x-x^2$ и линиями, a=3; b = 5; б) графиком функции $f(x) =\sin x$, $a=\frac{\pi}{4}$; $b=\pi$. 4. Найдите первообразную функции $f(x)=4–x^2$, график которой проходит через точку (-3; 10).	1.Найдите общий вид первообразных: $f(x) = 3x – 1$ на R $f(x) = x^5+ \cos x$ на R $f(x) = 2x^3 – 3x+ 2$ на R 2. Вычислите F(b) – F(a), если $f(x) = 3 x^3+ 4 x$; $a=\frac{4}{3}$; $b=-\frac{4}{3}$. 3. Вычислите площадь фигуры ограниченной: а) графиком функции $f(x) =x^2 – 2x+2$ и линиями, a = 0; b = 2; б) графиком функции $f(x) =\cos x$, a=0 ; $b=\pi$. 4. Найдите первообразную функции $f(x)=4x–x^2$, график которой проходит через точку (-1; 1).

Контрольная работа 8

Степени и корни. Степенная функция

1 вариант

№1. Вычислите:

а) $\sqrt[5]{-100000}$; б) $\sqrt[4]{1296}$; в) $-\sqrt[6]{0,000064}+\sqrt[3]{-1331}$

№2.Расположите числа в порядке убывания: $\sqrt[3]{31}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt[6]{666}$.

№3. Упростите выражение и найдите его значение: $\sqrt{9b^2}-\sqrt[3]{8b^3}-\sqrt[4]{256b^4}$, при $b=-3$.

№4.Вычислите: а) $81^{\frac{1}{4}}$; б) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$; в) $0,00032^{\frac{1}{5}}$; г) $\left(5\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$; д) $16^{-\frac{1}{4}}$.

№5.Упростите выражение: а) $c^{\frac{1}{3}}\cdot c^{\frac{1}{3}}$; б) $x^{-\frac{5}{6}}:x^{\frac{1}{3}}$; в) $\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$; г) $\left(a^{0,4}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot a^{0,8}$.

№6. Решите уравнение: а) $\sqrt[3]{x^2-9x-19}=-3$; б) $\sqrt[6]{x^2+7x+13}=-1$.

№7. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=\frac{5}{3}x^{0,6}+x^{-4}$ в точке x =1 .

№8 Упростить выражение $\left(\sqrt[4]{x}-2\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x}+2\sqrt[4]{y}\right)+2\sqrt[8]{y^7}\div\sqrt[8]{y^3}$

№9.Сократите дроби, считая, что переменные принимают неотрицательные значения:

а) $\frac{\sqrt{10b}-\sqrt{15}}{\sqrt{15b}-\sqrt{5}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{xy}}$.

2 вариант

№1. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{-343}$; б) $\sqrt[6]{0,000064}$; в) $\sqrt[7]{-128}+\sqrt[4]{625}$.

№2.Расположите числа в порядке возрастания: $\sqrt{11}$; $\sqrt[3]{30}$; $\sqrt[5]{777}$.

№3. Упростите выражение и найдите его значение: $\sqrt{25a^2}+\sqrt[3]{64a^3}-\sqrt[4]{16a^4}$, при $a=-5$.

№4. Вычислите: а) $64^{\frac{1}{2}}$; б) $\left(\frac{25}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$; в) $0,0081^{\frac{1}{4}}$; г) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$; д) $32^{-\frac{1}{5}}$.

№5. Упростите выражение: а) $b^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}}$; б) $x^{\frac{1}{2}}:x^{\frac{1}{3}}$; в) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$; г) $\left(a^{0,2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot a^{0,9}$.

№6. Решите уравнение: а) $\sqrt[4]{x^2-10x+25}=-2$; б) $\sqrt[3]{2x^2+6x-57}=-1$

№7. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=x^{-0,5}+3$ в точке x =1 .

№8. Упростить выражение $\left(2\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{y}\right)^2+4\sqrt[12]{a^7y^8}\div\sqrt[12]{a^5y^6}$

№9. Сократите дроби, считая, что переменные принимают неотрицательные значения: а) $\frac{\sqrt{14}-\sqrt{21}}{\sqrt{7x}-\sqrt{14}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{ab}}$.

Контрольная 9

Логарифмическая функции

Часть А *Запишите только ответ* 1. Вычислите $\log_2\frac{1}{8}$. 2. Вычислите $\log_{10}4+\log_{10}25$. 3. Сравните $\log_{0,02}3,5$ и $\log_{0,02}4,1$. 4. Вычислите $\frac{1}{4}\log_3\frac{16}{81}-\frac{1}{3}\log_3\frac{8}{27}$. 5. Выразите $\log_{\sqrt[3]{9}}5$ через логарифм по основанию 3.	Часть А *Запишите только ответ* 1. Вычислите $\log_{0,5}\frac{1}{4}$. 2. Вычислите $\log_5 50-\log_5 2$. 3. Сравните $\log_3 3,5$ и $\log_3 5,6$. 4. Вычислите $2\log_{10}3-\frac{1}{2}\log_{10}0,81$. 5. Выразите $\log_{\sqrt[5]{4}}7$ через логарифм по основанию
Вариант 1 1. Вычислить: 1) $\log_{\frac{1}{2}}16$; 2) $5^{4\log_5 3}$; 3) $\log_3 135-\log_3 20+2\log_3 6$ 2. Найти область определения функции y = log3 (x2 – 13x + 12) 3. Решите уравнение: а) log5(2x – 1) = 2 б) log2(x - 2) + log2 x = 3 в) $\log^2_{\frac{1}{2}} x+3\log_{\frac{1}{2}} x+2=0$ 4. Решите неравенство и укажите все его целые решения log3x > log3(5 – x) 5. Решите неравенство: а) $\log_{\frac{1}{3}}(x-5)$ > -1 б) $\log_4(x-2)+\log_4(x-8)<2$	Вариант 2 1.Вычислить: 1) $\log_3\frac{1}{27}$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2\log_{\frac{1}{3}}7}$; 3) $\log_2 56+2\log_2 12-\log_2 63$ 2. Найти область определения функции y = lg (-x2 – 5x + 14) 3. Решите уравнение: а) log4(2x + 3) = 3; б) log3(x - 8) + log3 x = 2 в) $\log^2_{0,2} x+\log_{0,2} x-6=0$ 4. Решите неравенство и укажите все его целые решения $\log_{\frac{1}{7}}(2x+3)$ < $\log_{\frac{1}{7}}(3x-2)$ 5. Решите неравенство: а) $\log_5(x-3)$ < 2; б) $\log_7(x-3,5)+\log_7(x-2)<1$

Контрольная 10

Уравнения и неравенства

№1. Решить уравнения.

1) $\frac{3x+1}{5}=2-\frac{4(x-3)}{15}$

2) (x-3)(x-2) = 6(x-3)

3) $\sqrt{x^2-16}$ = $x^2 - 22$

№2. Решить неравенства.

1) $-x^2 + 4x - 4$

2) $2x^2 + x + 3$ 0

3) $|12x-5|$

№3. Решить систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}.$$

№1. Решить уравнения.

1) $\frac{1-3y}{11}-\frac{3-y}{5}$ = 0

2) 0,3x(x + 13)-2x(0,9 - 0,2x) = 0

3) $\sqrt{x^2+9}$ = $x^2 - 11$

№2. Решить неравенства.

1) $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$

2) $3x^2 - 4x + 2$

3) $|3x-6|$ 1

№3. Решить систему линейных уравнений по формуле

$$\begin{cases} 3x+2y+z=3 \\ 5x-2y-2z=3 \\ x+y-z=-2 \end{cases}.$$

Перечень практических работ

Тема «Повторение курса математики основной школы»

Практическое занятие №1

Виды плоских фигур и их площадь.

Цель и задачи У владеть методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы

Задания для практической работы

1 вариант В треугольнике *ABC* угол *A* равен 90 °, *AC* = 6, sin *B* = 0,3. Найдите *BC*. Точка *H* является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла *B* треугольника *ABC* к гипотенузе *AC*. Найдите *AB*, если *AH* = 7, *AC* = 28. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, AC=10$\sqrt{6}$, BC = 5. Найдите sin A. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, sinA = 0,6, *BC* = 3. Найдите высоту *CH*. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.
2 вариант В треугольнике *ABC* угол *C* прямой, *AC* = 6 , *cos A* = 0,6 . Найдите *AB*. Катеты прямоугольного треугольника равны 21 и 72. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе. Точка *H* является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла *B* треугольника *ABC* к гипотенузе *AC*. Найдите *AB*, если *AH* = 4, *AC* = 16. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, AC=3, BC=4. Найдите sinA. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, BC=25, sinA =0,6. Найдите высоту *CH*.

Практическое занятие №2

Задачи в курсе геометрии на плоскости

Варианты заданий практической работы

Площадь прямоугольника равна 75. Найдите стороны этого прямоугольника, если одна из них в 3 раза больше другой.

Найдите площадь прямоугольника, если одна из его сторон равна5, а угол между диагоналями равен 60°.

Площадь параллелограмма равна 90. Найдите высоту параллелограмма, проведенную к стороне, равной 12.

Найдите площадь равностороннего треугольника, сторона которого равна 12.

Вычислите площадь трапеции АВСД с основаниями АД и ВС, если АД=20, ВС=4, АВ=16 и угол А=30°.

Найдите площадь равнобедренной трапеции, основания которой равны 8 и 12, а боковая сторона равна 10.

Площадь прямоугольника равна 520 м^2, а отношение его сторон равно 2: 5. Найдите периметр данного прямоугольника.

Стороны параллелограмма равны 5 см и 11 см. Найдите его площадь, если один из углов равен 30°.

Найдите площадь ромба со стороной 24 см и углом 120°.

Найдите площадь параллелограмма, периметр которого равен 42 см, а высоты равны 8 см и 6 см.

Практическая работа №3
Линейные, квадратные, дробно-линейные уравнения

Квадратные уравнения	Квадратные уравнения
Задание 1 Сколько корней будет иметь квадратное уравнение, если D0? а) 2 корня; b) 1 корень; c) нет корней. Задание 2 Вычислив дискриминант, укажите количество корней квадратного уравнения: а) $x^2 - 3x + 9 = 0$; б) $25x^2 - 30x + 9 = 0$; в) $x^2 - 10x + 16 = 0$. Задание 3 Решите квадратные уравнения: а) $x^2 - 4x - 5 = 0$; б) $x^2 - 9x - 6 = 0$; в) $x^2 + 12x + 130 = 0$. Задание 4 Решите квадратные уравнения: а) $3x^2 = 2x - 5$; б) $28\ x - x^2 = 2x +$	Задание 1 Сколько корней будет иметь квадратное уравнение, если D=0? а) 2 корня; b) 1 корень; c) нет корней. Задание 2 Вычислив дискриминант, укажите количество корней квадратного уравнения: а) $x^2 - 8x + 15 = 0$; б) $4x^2 - 40x + 25 = 0$; в) $x^2 - x + 7 = 0$. Задание 3 Решите квадратные уравнения: а) $x^2 - 5x + 4 = 0$; б) $x^2 - 8x + 9 = 0$; в) $x^2 - 20x + 100 = 0$. Задание 4 Решите квадратные уравнения: а) $3x^2 = 2x - 5$; б) $3x - 3x^2 = -26x - 10$.

6. Задание 5	Задание 5
Решите квадратное уравнение:	Решите квадратное уравнение:
$(3x+1)^2 = (2x+5)^2 - 33$.	$(x+2)^2 = (3x-1)^2 - 13x$.

Практическая работа №4
Линейные, квадратные, дробно-линейные неравенства

Цель работы**: обновить и закрепить знания школьного курса по теме**

Квадратные уравнения

Содержат неизвестную величину Х во второй степени
Общий вид: ax2 + bx + c = 0, где a – коэффициент при x2 , b – коэффициент при x, c – свободный коэффициент. Типы квадратных уравнений: полное - ax2 + bx + c = 0 неполное - ax2 + bx = 0; c = 0; ax2 + c = 0; b = 0; приведенное – x 2 + px + q =0; a = 1;

Примеры: 3x2 +2x -1 = 0; (x + 1)(x – 2) = 0; 3x2 – 1 = 0; 3x2 + x = 0.

Вариант 1 | *Вариант 2*

1. Решить неравенство:

Вариант 1	Вариант 2
а) $5x - 4 > 26$;	а) $7x + 3 > 38$;
б) $2y - \frac{1-3y}{4} \leqslant \frac{5+y}{8}$.	б) $3z - \frac{5-2z}{6} \leqslant \frac{2z+3}{2}$.

2. Найти все натуральные числа, удовлетворяющие неравенству

Вариант 1	Вариант 2
$5{,}6(y-3) - 3{,}2(2-y) < 20{,}8$.	$4{,}8(x-4) - 3{,}7(2-x) < 24{,}4$

3. При каких значениях x имеет смысл выражение?

Вариант 1	Вариант 2
а) $\frac{8}{\sqrt{3x-9}}$;	а) $\sqrt{\frac{5}{2x+10}}$;
б) $\sqrt{\frac{-5x+15}{13}}$.	б) $\frac{\sqrt{-8x+16}}{11}$.

Задание: решить неравенство.

1. $\frac{x-1}{x(x-3)}>0$

2. $\frac{4-9x^2}{10-x}\ge 0$

3. $\frac{3x-12x^2}{x+4}<0$

4. $\frac{a(4a-11)}{a-7}\le 0$

5. $\frac{x^2-3x+2}{6+3x}>0$

6. $\frac{8x^2-2x-1}{x}\le 0$

7. $\frac{(x+5)(x-6)}{6x+1}\le 0$

8. $\frac{x^2-14x+48}{x+7}>0$

9. $\frac{x-5}{x^2+7x}\le 0$

10. $\frac{(x-5)(2x+7)}{4-x}\ge 0$

11. $\frac{3b^2-27}{2b+7}<0$

12. $\frac{x^2-19x+84}{2(x-5)}>0$

13. $\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+35}>0$

14. $\frac{|t-2|}{t^2-5t+4}\le 0$

15. $\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(2x-1)(x+4)(3-x)}\le 0$

16. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}>\frac{3}{x+2}$

Задание: решить систему неравенств.

17. $\begin{cases} x^2+5x+5>11 \\ x^2+5x+5<19 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 5x>x \\ 25x^2>16 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 7x>x^2 \\ 16x^2<9 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 5x^2-2x+1\le 0 \\ 2(x+3)-(x-8)<4 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 35-2t-t^2>0 \\ 5x+1\le -1-5x \end{cases}$

22. $\begin{cases} 0,4x-1\le 0 \\ 2,3x\ge 4,6 \end{cases}$

23. $\begin{cases} \frac{5}{6}z-10\le 0 \\ 3z\le \frac{1}{3} \end{cases}$

24. $\begin{cases} 5x-7>-14+3x \\ -4x+5>29+2x \end{cases}$

25. $\begin{cases} 4x+2\ge 5x+3 \\ 2-3x<7-2x \end{cases}$

26. $\begin{cases} 5x-10>15 \\ x^2+x-6\le 0 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2+4x+3\le 0 \\ 2x^2+5x<0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} \frac{x^2-9}{x}\ge 0 \\ 2x-1\ge 0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} \frac{(x-2)(x+3)}{x(x+7)}<0 \\ 20x\ge 20 \end{cases}$

30. $\begin{cases} |3+x|\ge 6 \\ |2x+5|\ge 11 \end{cases}$

1. $\frac{7x-4}{9}-\frac{3x+3}{4}>\frac{8-x}{6}$ $\quad\quad x\in(13;+\infty)$

2.: $(x-1)^2-(x-2)(x+1)\le 1$

Практическая работа5

Сжатие и растяжение графиков тригонометрических функций

Цель:

Показать программу и её использование для быстрого вычисления значений функций и построения графиков.

Научить пользоваться для этого программой.

Проанализировав получившиеся графики, сделать выводы о преобразованиях, вызванных рассмотренными операциями.

Получить наглядную иллюстрацию.

В дальнейшем использовать полученные умения для исследований других функций.

Для построения графика функции $y=f(x)+a$, где а - постоянное число, надо перенести график $y=f(x)$ вдоль оси ординат. Если а>0, то график переносим параллельно самому себе вверх, если а < 0, то – вниз.

Для построения графика функции $y=kf(x)$ надо растянуть график функции $y=f(x)$ в k раз вдоль оси ординат. Если $|k|>1$, то происходит растяжение графика вдоль оси OY, если $0<|k|<1$, то – сжатие.

График функции *y=f(x+b)* получается из графика *y=f(x)* путем параллельного переноса вдоль оси абсцисс. Если b>0 , то график перемещается влево, если b<0, то – вправо.

Для построения графика функции *y=f(kx)* надо растянуть график *y=f(x)* вдоль оси абсцисс. Если *|k|>1*, то происходит сжатие графика вдоль оси *OX*, если 0<|k|<1 , то – растяжение.

Примеры преобразования графиков функций:

График функции $y=\sin\frac{x}{3}$ получается из графика $y=\sin x$ путем растяжения вдоль оси *Ox* в 3 раза.
2. $y=2\cos x$

График функции получается из графика $y=\cos x$ путем растяжения вдоль оси *Oy* в 2 раза.
3. $y=tgx+2$

График функции $y=tgx+2$ получается из графика $y=tgx$ путем параллельного переноса на 2 единицы вверх вдоль оси *Oy*.

4 График функции получается из графика $y=\cos\left(x+\frac{\Pi}{2}\right)$

путем параллельного переноса вдоль оси абсцисс на $\frac{\Pi}{2}$ единиц влево.

график функции $y=\frac{1}{4}\sin x$ получается из графика $y=\sin x$ путем сжатия вдоль оси *Oy* в 4 раза.

Задания для практической работы

Постройте графики функций:

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
y= -sin x y= cosx +1 y= 2sinx y=cos(0,5x)	y= - cosx y= sinx -1 y=2cosx y= - sin2x	y= -tgx y= cosx -1 y=0,5sinx y=cos2x	y= -sinx y= sinx+1 y=0,5cosx y=sin3x

Практическое занятие№6

Преобразование графиков тригонометрических функций

Цель работы: распространить умение преобразований графиков на тригонометрические функции.

Теоретическая основа:

1 Для построения графика функции $y=f(x)+a$, где а - постоянное число, надо перенести график $y=f(x)$ вдоль оси ординат. Если а>0, то график переносим параллельно самому себе вверх, если а < 0, то – вниз.
2 Для построения графика функции $y=kf(x)$ надо растянуть график функции $y=f(x)$ в k раз вдоль оси ординат. Если $|k|>1$, то происходит растяжение графика вдоль оси OY, если $0<|k|<1$, то – сжатие.
3 График функции $y=f(x+b)$ получается из графика $y=f(x)$ путем параллельного переноса вдоль оси абсцисс. Если b>0 , то график перемещается влево, если b<0, то – вправо.
4 Для построения графика функции $y=f(kx)$ надо растянуть график $y=f(x)$ вдоль оси абсцисс. Если $|k|>1$, то происходит сжатие графика вдоль оси OX, если 0<|k|<1 , то – растяжение.
Сжатие и растяжение графика.

Здесь речь идет о построении графиков функций вида:

$y = m \sin kx,$

$y = m \cos kx,$

$y = m \operatorname{tg} kx,$

$y = m \operatorname{ctg} kx.$

$\boldsymbol{y = f(kx)}$

При $k > 1$ – сжатие графика к оси ординат в k раз,

при $0 < k < 1$ – растяжение графика от оси ординат в k раз,

Вообще говоря, построение графика функции

$y = m \sin kx$

осуществляется в три этапа:

1. Строят график функции $y = \sin x$.

2. Строят график функции $y = \sin kx$.

3. Строят график функции $y = m \sin kx$.

Аналогично обстоит дело с другими тригонометрическими функциями.

На практике обычно при построении графика функции

$y = m \sin kx$ ($y = m \cos kx$)

выполняют растяжение и сжатие для одной полуволны графика функции

$y = \sin x$ ($y = \cos x$),

а затем строят весь график.

Задания для практической работы

1 Построить график функции:

$y = -3 \cos 2x$
2 Построить график функции
$y = 2 \sin (x/3 - \pi/6)$.
3*Построить график функции*

$y = 3 \sin (2x + \pi/3)$.

Построить на одной координатной плоскости графики функций:
1. y= sin x 2. y=sin(x-1,5) Построить на одной координатной плоскости графики функций:
1. y= cos x 2. y=cos(x-2)
Построить на одной координатной плоскости графики функций:
1. y= sin x 2. y=sin(2x) 3. y=sin(2x-0,5)
Построить на одной координатной плоскости графики функций:
1. y= ctg x 2. y= ctg (x+1) 3. y=ctg (2x+1)
Построить на одной координатной плоскости графики функций:
1. y= tg x 2. y= 3tg x 3. y=3tg(x-3)

Практическое занятие №7

Тема «Физический смысл производной в задачах»

Цель -рассмотреть решение примеров на механический смысл производной
Физический смысл производной в профессиональных задачах
повторить, в чем заключается механический смысл производной
рассмотреть решение примеров на механический смысл производной

Критерии оценок

оценка «5» ставится за правильные ответы на все вопросы и верное выполнение всех заданий работы

оценка «4» ставится за правильные ответы на все вопросы и верное выполнение любых шести заданий работы

оценка «3» ставится за правильные ответы на вопросы и верное выполнение любых пяти заданий работы

Порядок выполнения работы

Задание 1.

, ответить на вопросы и ответы записать в тетрадь:
1. В чем заключается механический смысл производной?
2. Как находится скорость движения материальной точки?
3. Как вычисляется ускорение с помощью производной

Варианты заданий практической работы:

1. Закон прямолинейного движения точки выражается формулой $s = 1 + t^2 - \frac{1}{4}t^4$ (s выражается в метрах, t - в секундах). Найти скорость и ускорение движения в момент времени $t=3$

2. Тело массой 25 кг движется прямолинейно по закону s = ln(1 + t^2¿. Найти кинетическую энергию тела (0.5m v^2¿ через 2с после начала движения.
3. Точка движется по оси абсцисс по закону x = 0,25($t^4 - 4t^3 + 2t^2 - 2t$¿ (x выражается в метрах, t - в секундах). В какой момент времени точка остановится?
4. Точка движется прямолинейно по закону s(t) = 4 $t^3 + 5t^2$ +4 (s измеряется в метрах, t – в секундах). Напишите формулы, выражающие скорость и ускорение в любой момент времени и вычислите их при t = 3с.

1. Точка движется прямолинейно по закону $s = 2t^3 + t^2 - 4$.

Найдите скорость и ускорение в момент времени t = 4 с.

2. Точка движется прямолинейно по закону $s = t^2 - 8t + 4$.
В какой момент времени скорость точки окажется равной нулю?

3. Тело массой 10 кг движется прямолинейно по закону $s = 3t^2 + t + 4$. Найдите кинетическую энергию тела ($mv^2/2$) через 4 с.

1. Точка движется прямолинейно по закону $s = t^3 + 5t^2 + 4$.

Найдите скорость и ускорение в момент времени t = 2 с.

2. Точка движется прямолинейно по закону $s = 6t - t^2$.
В какой момент времени скорость точки окажется равной нулю?

3. Тело массой 100 кг движется прямолинейно по закону $s = 5t^2 - 4$. Найдите кинетическую энергию тела ($mv^2/2$) через 2 с.

Практическое занятие №8
Мгновенная скорость в момент времени

Физический смысл производной заключается в том, что производная выражает скорость протекания процесса, описываемого зависимостью $y = f(x)$:

- если это движение автомобиля, то, принимая в качестве функции зависимость пройденного расстояния от времени, с помощью производной получается зависимость скорости от времени;

- если же рассмотреть в качестве функции мгновенную скорость автомобиля, то производная задает изменение его ускорения;
- если рассмотреть функцию, задающую зависимость объема произведенной продукции от времени, то производная позволит узнать, как изменялась со временем производительность труда на этом предприятии;
- если рассматриваются электромагнитные волны, то могут потребоваться функции, характеризующие изменение со временем электрического и магнитного полей, а также их производные - скорости изменения этих полей, ведь величина магнитного поля пропорциональна скорости изменения электрического поля и т.п.

Решая конкретные текстовые задачи на скорость процесса с применением производной, следует не забывать о размерностях величин. Если переменная y, заданная функцией $f(x)$ измеряется в некоторых единицах [y], а её аргумент в единицах [x], то производная (скорость) измеряется в единицах [y/x].

Скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t:

$v(t) = S'(t)$,

а ускорение – производная скорости по времени:

$a(t) = v'(t) = S''(t)$.

Если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная y' есть скорость протекания этого процесса. В этом заключается механический смысл производной.

Примеры:

1. Закон движения тела задан формулой $S(t)=0{,}5t^2 + 3t + 2$ (S - в метрах, t – в секундах). Какой путь пройден телом за 4 секунды? Какова скорость движения в этот момент времени?

Решение:

$S(4)=0{,}5\cdot 4^2 + 3\cdot 4 + 2 = 8+12+2=22$ (м)

$v(t)=(0{,}5t^2 + 3t + 2)'=t+3$ (м/с)

v(4)=4+3=<u>7 (м/с)</u>

Ответ:7 м/с

Варианты заданий практической работы

1 .А) Закон движения тела задан формулой $S(t)= t^3 + 3t - 4$ (S - в метрах, t – в секундах). Какой путь пройден телом за 4 секунды? Какова скорость движения в этот момент времени?

Б) Закон движения тела задан формулой $S(t)= t^3 - 3t + 4$ (S - в метрах, t – в секундах). Какой путь пройден телом за 4 секунды? Какова скорость движения в этот момент времени?

2. А)Пусть популяция бактерий в момент t (сек) насчитывает $x(t) = 3000 + 100\ t^2$ особей. В какой момент времени скорость роста популяции будет равна *600* особей в секунду?

Б)Пусть популяция бактерий в момент t (сек) насчитывает $x(t) = 4000 + 200\ t^2$ особей. В какой момент времени скорость роста популяции будет равна *800* особей в секунду?

3. А)Объём продукции *V* цеха в течение дня зависит от времени по закону

$V(t) = -\frac{5}{3}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 50t + 70$ *(ед.)*. Вычислите производительность труда $П(t)$ в момент времени $t = 2$ часа..

Б)Объём продукции *V* цеха в течение дня зависит от времени по закону

$V(t) = \frac{5}{3}t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 50t + 70$ *(ед.)*. Вычислите производительность труда $П(t)$ в момент времени $t = 2$ часа.

4.А)Мама с дочкой гуляли в парке. Девочка захотела покататься на каруселях, а мама решила сфотографировать дочку. Вращение карусели совершается по закону

$g(t) = \frac{1}{9}t^3 - \frac{5}{2}t^2$. Фотография может быть хорошего качества только при ускорении равном *3* м/с^2. В какой момент времени необходимо сделать снимок?

Б)Мама с дочкой гуляли в парке. Девочка захотела покататься на каруселях, а мама решила сфотографировать дочку. Вращение карусели совершается по закону

$g(t) = \frac{1}{12}t^3 - 3t^2$. Фотография может быть хорошего качества только при ускорении равном *2* м/с^2. В какой момент времени необходимо сделать снимок?

Практическое занятие№9
Понятие правильного многогранника

Цели

- Ввести понятие правильного многогранника.
- Рассмотреть свойства правильных многогранников.
- Обобщить и систематизировать сведения о многогранниках.
- Развивать умения и навыки уч-ся выделять конкретные виды из многообразия многогранников, решать задачи.

многогранник	Число граней	Число вершин	Число ребер	Г+В
Тетраэдр	4	4	6	
Куб	6	8	12	
Октаэдр	8	6	12	
Додекаэдр	12	20	30	
Икосаэдр	20	12	30	

Задания для практической работы

1. Сколько ребер у шестиугольной пирамиды:
Ответ: а)6; б)12; в)18; г)24; д)8
2. Какое наименьшее число граней может иметь пирамида:
Ответ: а)5; б)12); в)10; г)6; д)4
3.Выберите верное утверждение:
а) Многогранник, составленный из n-треугольников, называется пирамидой;
б) пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник;
в) высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется апофемой;
4. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 4см, а длина диагонали основания - $6\sqrt{2}$ см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
Ответ: а)96см^2; б)156см^2; в)36см^2; г)60см^2; д)150см^2
5 Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 24 дм, боковое ребро с плоскостью основания образует угол 300. Вычислите высоту пирамиды

Вариант 2

1. Сколько граней у шестиугольной пирамиды:
Ответ: а)6; б)7; в)8; г)10; д)12
2. Какое наименьшее число ребер может иметь пирамида:
Ответ: а)6; б)5; в)4; г)7; д)8
3.Выберите верное утверждение:
а) Высота пирамиды называется высотой грани;
б) площадь боковой поверхности пирамиды равна произведению периметра основания на высоту;
в) пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник;
4. Высота правильной треугольной пирамиды равна 12см, сторона основания 15см. Найти площадь полной поверхности пирамиды.
5Сечение, которое проведено параллельно
основанию треугольной пирамиды, делит высоту пирамиды в отношении 5:9, считая от вершины. Вычислите площадь сечения, если площадь основания равна 784 дм^2.

Практическое занятие№10

Свойства правильных многогранников

Цель работы:
Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Многогранники и площади их поверхностей».
Закрепить и систематизировать знания по теме.
Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов

Задания для практической работы
Задача1
Площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы равна площади основания. Вычислите длину бокового ребра, если сторона основания 7см
$49\sqrt{3} / 4 = 3 * 7h$
$49\sqrt{3} / 4 = 21h$
откуда
$h = 7\sqrt{3} / 12$
Ответ: длина бокового ребра правильной треугольной призмы равна $7\sqrt{3} / 12$
Задача 2
Найдите площадь правильной треугольной призмы, сторона основания которой 6 см, а высота - 10 см.
Таким образом, площадь полной поверхности призмы будет равна $180 + 18\sqrt{3} \approx 211,18$ см кв.
Ответ: $180 + 18\sqrt{3} \approx 211,18$
Задача 3

В правильной четырёхугольной призме площадь основания 144 см^2, а высота 14 см. Найти диагональ призмы и площадь полной поверхности.
$\sqrt{((12\sqrt{2})^2 + 14^2)} = 22$ см
Ответ: 22 см

Задача 4

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, апофема равна 13 см. Найдите площадь полной поверхности.

Задача 5

В правильной четырёхугольной призме площадь основания 144 см^2, а высота 14 см. Найти диагональ призмы и площадь полной поверхности.

Задача 6

Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 72, боковые рёбра равны 39. Найти площадь полной поверхности этой пирамиды.

Практическое занятие№11
Комбинации многогранников

Цель:

ознакомить учащихся с тремя способами решения задач на комбинацию многогранников и сферы;
развивать умение работать с чертежом, обобщать, сравнивать, переносить знания в новую ситуацию, активизировать мыслительную деятельность учащихся;
воспитывать творческий подход к решению задач, эстетическое восприятие чертежа

Варианты заданий практической работы.

Задача1.

Дана сфера радиуса 8, с центром в точке O. В этой сфере проведено сечение, плоскость которого удалена от центра сферы на расстояние 4. Точка выбрана F на сфере, а точки A,B, C,D - последовательно на окружности сечения так, что объем пирамиды FABCD наибольший. Найдите синус угла между прямой и плоскостью AFB.
Решение.
ABF: $OK \perp ABF$, $K \in FT$ т.к. ΔABF – равнобедренный, $FT \perp AB$.

Тогда уголOAK - угол между прямой AO и плоскостью ABF, sin углаOAK =
3) В прямоугольном ΔO_1DO $OD = R=8$, $OO_1 = 4$, тогда $DO_1 = 4\sqrt{3}$.
$AB = 44\sqrt{6}$, $AT = ½ AB$, $AT = .2\sqrt{6}$
4) В прямоугольном ΔO_1TF $O_1F = 12$, $O_1T = 4\sqrt{3}$, тогда $FT = 2\sqrt{43}$.
5) Рассмотрим прямоугольные треугольники FO_1T и FOK. Они имеют общую вершину F, тогда $\Delta O_1FT \infty \Delta OFK$. Имеем: , $OK = \frac{8\sqrt{7}}{7}$. Значит,
sin угла OAK = $\frac{8\sqrt{7}}{7} * \frac{1}{8}$ sin угла OAK = $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **Ответ:** $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

Задача 2. В треугольную пирамиду со сторонами основания 20 см, 12 см и 16 см вписан шар. Найти его радиус, если двугранные углы при основании пирамиды равны по 600 .

Задача 3. В треугольную пирамиду со сторонами основания 10 см, 17 см и 21 см вписан шар. Найти его радиус, если высота пирамиды равна 12 см, а двугранные углы при основании равны между собой

Ответ: 2 ' Р

Задача4 Отрезок PN – диаметр сферы. Точки M, L лежат на сфере так, что объем пирамиды PNML наибольший. Найдите синус угла между прямой NT и плоскостью PMN, если T – середина ребра ML.

.Ответ**:** $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Задача 5 Дана сфера радиуса 5. Сечением этой сферы плоскостью является окружность с центром O_1. Плоскость сечения удалена от центра сферы на расстояние 3. Точка T выбрана на сфере, а точки K, L, M, N – последовательно на окружности сечения так, что объем TKLMN пирамиды наибольший. Точка A – середина ребра TL. Найдите косинус угла между прямыми O_1A и LM.

Ответ: .$\frac{\sqrt{10}}{10}$

Задача 6 Дана сфера радиуса 8, с центром в точке O. В этой сфере проведено сечение, плоскость которого удалена от центра сферы на расстояние 4. Точка выбрана F на сфере, а точки A,B, C,D - последовательно на окружности сечения так, что объем пирамиды FABCD наибольший. Найдите синус угла между прямой и плоскостью AFB.

Ответ**:** $\frac{\sqrt{7}}{7}$

Практическое занятие№12

Комбинации тел вращения

Цель:1) ознакомить учащихся с тремя способами решения задач на комбинацию многогранников и сферы;
2) развивать умение работать с чертежом, обобщать, сравнивать, переносить знания в новую ситуацию, активизировать мыслительную деятельность учащихся

Задачи:
1способствовать развитию умения сравнивать, обобщать, классифицировать, анализировать, делать выводы.

Знать формулы для нахождения площадей поверхностей тел вращения и уметь применять их к решению задач.

Варианты заданий практической работы

Задача1.
. Осевое сечение цилиндра – квадрат, длина диагонали которого равна 20 см. Найдите радиус основания цилиндра.
5 $\sqrt{2}$ см; 2) 8 $\sqrt{2}$ см; 3) 10 см; 4) 10 $\sqrt{2}$ см
Задача2.
. Площадь осевого сечения цилиндра равна 6 $\sqrt{\pi}$ дм ^{2} , а площадь основания цилиндра равна 25 дм ^{2} . Найдите высоту цилиндра.
1) $\frac{2}{3}\pi$ дм; 2) $\frac{\pi}{2}$ дм; 3) 0,6 π дм; 4) 2 дм
Задача3.
. Длина образующей конуса равна 2 $\sqrt{3}$ см, а угол при вершине осевого сечения конуса равен 120 $^\circ$. Найдите площадь основания конуса.
8 π см ^{2} ; 2) 8 $\sqrt{2}$ π см ^{2} ; 3) 9 π см ^{2} ; 4) 6 $\sqrt{3}$ π см ^{2}
Радиус основания конуса 3 $\sqrt{2}$ см. Найдите наибольшую возможную площадь осевого сечения данного конуса.
16 $\sqrt{2}$ см ^{2} ; 2) 18 см ^{2} ; 3) 12 $\sqrt{3}$ см ^{2} ; 4) 16 см ^{2}
Задача4.
Стороны треугольника АВС касаются шара. Найдите радиус шара, если АВ =8 см, ВС=10 см, АС=12 см и расстояние от центра шара О до плоскости треугольника АВС равно $\sqrt{2}$ см.
3 $\sqrt{3}$ см; 2) 2 $\sqrt{3}$ см; 3) 3 см; 4) 3 $\sqrt{2}$ см

Задача5.
Дана сфера радиуса 8, с центром в точке О. В этой сфере проведено сечение, плоскость которого удалена от центра сферы на расстояние 4. Точка выбрана F на сфере, а точки A,B, C,D - последовательно на окружности сечения так, что объем пирамиды FABCD наибольший. Найдите синус угла между прямой и плоскостью AFB.
Решение 1) Объем пирамиды FABCD наибольший, когда наибольшими будут площадь основания и высота пирамиды. Площадь основания наибольшая, когда ABCD – квадрат. Высота пирамиды наибольшая, когда $h=FO_1$, $O \in FO_1$.
2)Прямая OA - наклонная по отношению к плоскости ABF. Опустим из точки O перпендикуляр на плоскость ABF: $OK \perp ABF$, $K \in FT$ т.к. ΔABF – равнобедренный, $FT \perp AB$.
Тогда уголOAK - угол между прямой AO и плоскостью ABF, sin углаOAK =
Задача6.
В прямоугольном ΔO_1DO $OD = R=8$, $OO_1 = 4$, тогда $DO_1 =4\sqrt{3}$.

AB =$44\sqrt{6}$, AT = ½ AB, AT = .$2\sqrt{6}$

4) В прямоугольном ΔO_1TF $O_1F = 12$, $O_1T = 4\sqrt{3}$, тогда FT = $2\sqrt{43}$.

Рассмотрим прямоугольные треугольники FO_1T и FOK. Они имеют общую вершину F, тогда $\Delta\ O_1FT \infty\ \Delta OFK$. Имеем: , ОК = $\frac{8\sqrt{7}}{7}$. Значит,

sin угла OAK = $\frac{8\sqrt{7}}{7} * \frac{1}{8}$ sin угла OAK =$\frac{\sqrt{7}}{7}$. Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

Практическое занятие№13

Понятие об определенном интеграле

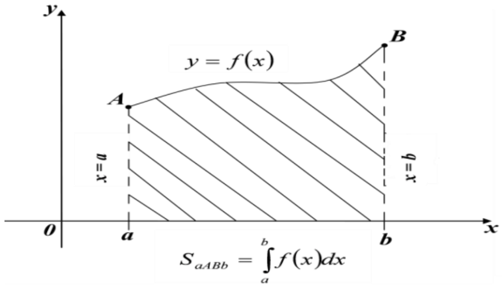
Цель: Отработать навыки нахождения первообразной функции, значения определенного интеграла, использования геометрического и физического смысла определенного интеграла при решении прикладных задач.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если для всех $x \in [a;b]$ выполняется равенство:

$F'(x) = f(x)$

Таблица интегралов.

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$,
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$,
4. $\int e^x dx = e^x + C$,
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$,
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$,
9. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$,
10. $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$,
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$,
12. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$,
13. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$,
14. $\int dx = x + C$,



I. Геометрический смысл определенного интеграла.

Пусть дана функция $f(x)$ непрерывная на $[a;b]$. Рассмотрим график этой функции (некоторую кривую).

ф игура $aABb$, ограниченная отрезком $[a;b]$ оси OX, отрезками параллельных прямых $x=a$ и $x=b$, и кривой $y=f(x)$, называется криволинейной трапецией.

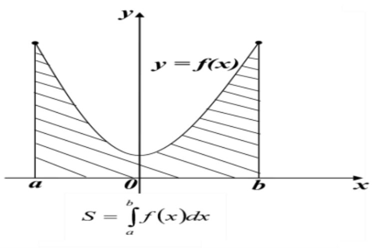
Если интегрируемая на $[a;b]$ функция $f(x)$ неотрицательна, то определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной $[a;b]$ оси OX, отрезками прямых $x=a$, $x=b$ и графиком данной функции. В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла.

II. Вычисление площадей плоских фигур.
Из геометрического смысла определенного интеграла известно, что если $f(x)\geq 0$, $x\in[a;b]$, то площадь соответствующей криволинейной трапеции вычисляется по формуле: $S_{aABb}=\int_a^b f(x)\,dx$

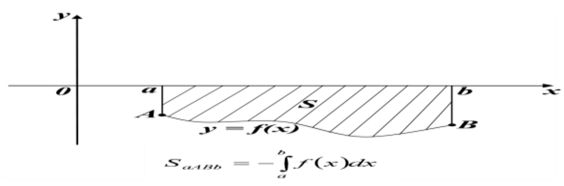
Очевидно, что если $f(x)\leq 0$, $x\in[a;b]$, то $S_{aABb}=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$

Рассмотрим основные случаи расположения плоских фигур:

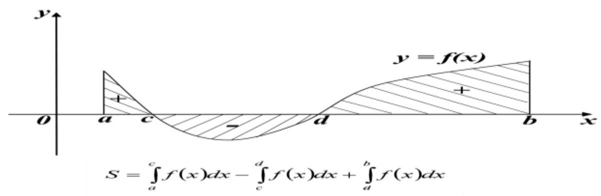
1.



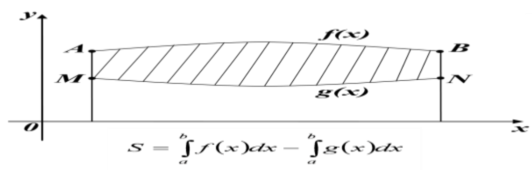
2.



3.



4.



III. Применение определенного интеграла в физике.
Путь, пройденный точкой при неравномерном движении за промежуток времени от t_1 до t_2 вычисляется по формуле: $S=\int_{t_1}^{t_2} \vartheta(t)\,dt$

Варианты заданий практической работы

1. Определите функцию, для которой $F(x)=x^2-\sin 2x-1$ является первообразной:

1) $f(x)=\frac{x^3}{3}+\cos 2x+x$ **;** **2)** $f(x)=2x-2\cos 2x$ **;**

3) $f(x)=2x+\frac{1}{2}\cos 2x$;

3) $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cos 2x+x$

2. Для функции $f(x)=x^2$, найдите первообразную $F(x)$, принимающую заданное значение в заданной точке $F(-1)=2$.

1) $F(x)=\frac{x^3}{3}+2\frac{1}{3}$; 2) $F(x)=2x+2\frac{1}{3}$; 3) $F(x)=-\frac{x^3}{3}+2\frac{1}{3}$; 4) $F(x)=\frac{x^3}{3}-2\frac{1}{3}$

3. Точка движется по прямой так, что ее скорость в момент времени t равна $v(t)=t+t^2$. Найдите путь, пройденный точкой за время от 1 до 3 секунд, если скорость измеряется в $м/с$.

1) $18\,м$; 2) $12\frac{1}{3}\,м$; 3) $17\frac{1}{3}\,м$; 4) $20\,м$

4. Вычислите: а) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{6}{\cos^2 x}dx$; б) $\int_2^4 4x\,dx$.

1) $6\sqrt{3}$; 2) 6 ; 3) $2\sqrt{3}$; 4) $3\sqrt{3}$

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=-x^2+3;\ y=0$

1) $4\sqrt{3}$; 3) $9\sqrt{3}$;

2) $6\sqrt{3}$; 4) $8\sqrt{3}$.

б) $y=\sqrt{x};$ $y=\frac{1}{2}x$

1) 2 ; 3) $2\frac{2}{3}$;

2) $1\frac{1}{3}$; 4) $1\frac{2}{3}$.

Практическое занятие№14
Интеграл как площадь криволинейной трапеции

Варианты заданий практической работы

1. Определите функцию, для которой $F(x)=-\cos\frac{x}{2}-x^3+4$ является первообразной:

1) $f(x)=-\sin\frac{x}{2}-3x^2$;

2) $f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}-3x^2$;

3) $f(x)=-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}-3x^2$;

4) $f(x)=2\sin\frac{x}{2}-3x^2$.

2. Для функции $f(x)=2x-2$ найдите первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $A(2;1)$.

1) $F(x)=-x^2-2x-1$ 2) $F(x)=x^2+2x+2$; 3) $F(x)=2x^2-2$ 4) $F(x)=x^2-2x+1$

3. Точка движется по прямой так, что ее скорость в момент времени t равна $v(t)=3+0{,}2t$. Найдите путь, пройденный точкой за время от 1 до 7 секунд, если измеряется в $м/с$.

1) $22{,}8\,м$ 2) $29\,м$; 3) $23\,м$; 4) $13\,м$

4. Вычислите: а) $\int_{\pi}^{2\pi} \cos\frac{x}{6}dx$; б) $\int_1^4 (x^2-6x)dx$

а)

1) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; 2) $3\sqrt{3}-3$; 3) 0; 4) $3-3\sqrt{3}$

2)А1. Вычислите интеграл $а)\int_1^8 x^{-3}dx;$ $б)\int_{-3\pi}^{0} \cos 3x\,dx.$

А2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2+2x+3,\quad y=0$

В1. Вычислите площадь фигуры ограниченной линиями:

$y=0,\ \ y=2\sin\frac{x}{2},$ если $0\le x\le 2\pi.$

А1. Вычислите интеграл: $а)\int_0^1 x^3dx;$ $б)\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin x\,dx.$

А2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями : $y=-x^2+x+2,\quad y=0$

В1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y=\sin x,\ \ y=2\sin\frac{x}{2},$ если $0\le x\le 2\pi.$

Практические занятия 15

Тема Геометрический смысл определенного интеграла

Цель: Отработать навыки нахождения первообразной функции, значения определенного интеграла, использования геометрического и физического смысла определенного интеграла при решении прикладных задач.

Путь, пройденный точкой при неравномерном движении за промежуток времени от t_1 до t_2 вычисляется по формуле: $S=\int_{t_1}^{t_2} \vartheta(t)\,dt$

Варианты заданий практической работы

1. Определите функцию, для которой $F(x)=x^2-\sin 2x-1$ является первообразной:

1) $f(x)=\frac{x^3}{3}+\cos 2x+x$; 2) $f(x)=2x-2\cos 2x$;

3) $f(x)=2x+\frac{1}{2}\cos 2x$; 3) $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cos 2x+x$

2. Для функции $f(x)=x^2$, найдите первообразную $F(x)$, принимающую заданное значение в заданной точке $F(-1)=2$.

1) $F(x)=\frac{x^3}{3}+2\frac{1}{3}$; 2) $F(x)=2x+2\frac{1}{3}$; 3) $F(x)=-\frac{x^3}{3}+2\frac{1}{3}$; 4) $F(x)=\frac{x^3}{3}-2\frac{1}{3}$

3. Точка движется по прямой так, что ее скорость в момент времени t равна $\upsilon(t)=t+t^2$. Найдите путь, пройденный точкой за время от 1 до 3 секунд, если скорость измеряется в $м/с$.

1) $18\,м$; 2) $12\frac{1}{3}м$; 3) $17\frac{1}{3}м$; 4) $20\,м$

4. Вычислите: а) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{6}{\cos^2 x}dx$; б) $\int_2^4 4\,xdx$.

а)

1) $6\sqrt{3}$; 2) 6 ; 3) $2\sqrt{3}$; 4) $3\sqrt{3}$

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=-x^2+3\,;y=0$

1) $4\sqrt{3}$; 3) $9\sqrt{3}$;

2) $6\sqrt{3}$; 4) $8\sqrt{3}$.

б) $y=\sqrt{x};$ $y=\frac{1}{2}x$

1) 2 ; 3) $2\frac{2}{3}$;

2) $1\frac{1}{3}$; 4) $1\frac{2}{3}$.

Практическое занятие №16

Понятие степени с любым рациональным показателем

Определение. Степенью числа $a>0$ с рациональным показателем $r=\frac{m}{n}$, где m-целое число, а n-натуральное ($n>1$), называется число $\sqrt[n]{a^m}$. Итак, по определению $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Свойства степени с рациональным показателем**,**
где r,s-рациональные числа, $a>0$, $b>0$.

$1^0. a^r\cdot a^s=a^{r+s}$

$2^0. a^r : a^s=a^{r-s}$

$3^0. (a^r)^s=a^{r\cdot s}$

$4^0. (a\cdot b)^r=a^r\cdot b^r$

$5^0 \left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$

$6^0.$ *Пусть* r – *рациональное число и* $0<a<b$, *тогда* $a^r<b^r$ *при* $r>0$ *и* $a^r>b^r$ *при* $r<0$.

$7^0.$ *Для любых рациональных чисел* r *и* s *из неравенства* $r>s$ *следует что,* $a^r>a^s$ *при* $a>1$ *и* $a^r<a^s$ *при* $0<a<1$.

Степень с действительным показателем	
1 вариант	2 вариант
1. Расположите в порядке убывания числа: $5^{\sqrt{3}}$; $5^{\frac{6}{\sqrt{6}}}$¿ $5^{\sqrt{7}}$; $5^{\frac{11}{\sqrt{11}}}$.	1. Расположите в порядке убывания числа: $6^{\sqrt{5}}$; $6^{\frac{7}{\sqrt{7}}}$¿ $6^{\sqrt{8}}$; $6^{\frac{10}{\sqrt{10}}}$.
2. Вычислите: 1) $\sqrt[3]{5^{(\sqrt{2}+1)^2}\cdot 5^{(\sqrt{2}-1)^2}}$; 2) $6^{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{\sqrt{3}-1}+\sqrt{\left(4^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}}}$¿ 3) $3^{\sqrt{2}}\cdot 9^2 : \sqrt[3]{27^{\sqrt{2}}}$; 4) $4^{3\pi}\cdot\sqrt[3]{4^6 : 4^{9\pi}}$.	2. Вычислите: 1) $\sqrt[5]{7^{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}\cdot 7^{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}}$; 2) $7^{\sqrt{8}}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{8}-1}+\sqrt{\left(25^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}}$¿ 3) $5^{\sqrt{7}}\cdot 2^3 : \sqrt[4]{625^{\sqrt{7}}}$; 4) $7^{5\pi}\cdot\sqrt{16^2 : 7^{10\pi}}$.
3. Сравните с единицей число: 1) $3^{-\sqrt{3}}$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{6}}$¿ 3) $\left(\frac{\pi}{9}\right)^{\sqrt{6}-3}$¿ 4) $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{5}-2}$.	3. Сравните с единицей число: 2) $10^{-\sqrt{10}}$; 2) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{5}}$¿ 3) $\left(\frac{\pi}{20}\right)^{\sqrt{11}-4}$¿ 4) $\left(\sin\frac{\pi}{10}\right)^{\sqrt{3}-1}$.
4. Упростите: $\dfrac{a^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-b^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{a^{\sqrt{3}}-b^{\sqrt{3}}}$.	4. Упростите: $\dfrac{a^{\frac{\sqrt{5}}{2}}+b^{\frac{\sqrt{5}}{2}}}{a^{\sqrt{5}}-b^{\sqrt{5}}}$.

Варианты заданий практической работы

1 вариант.

А1. Вычислите $\sqrt[5]{243}$.

А2. Вычислите $\sqrt[6]{16}\cdot\sqrt[3]{-2}$.

А3. Упростите выражение $(\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}\,)^3$.

А4. Вычислите $\sqrt[4]{0{,}5}\cdot\sqrt[4]{0{,}125}.$

А5. Найдите значения выражения $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+4}+\dfrac{4\sqrt{y}}{y-16}$ при y = 18.

А7. Найдите значение выражения: $6\cdot 8^{-\frac{1}{3}}$.

А8. Найдите начение выражения: $\left(\dfrac{36^3}{125^2}\right)^{\frac{1}{6}}$.

А9. Найдите значение выражения: $\left(2^{\frac{5}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}-3^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\sqrt[3]{6}.$

А10. Сократите дробь: $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)}$

2 вариант.

А1. Вычислите $\sqrt[4]{625}$.

А2. Вычислите $\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[3]{-4}$.

А3. Упростите выражение $(\sqrt[8]{a\sqrt[3]{a}}\,)^3$.

А4. Вычислите $\sqrt[4]{0{,}3}\cdot\sqrt[4]{0{,}027}.$

А5. Найдите значения выражения $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+ab}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right):\sqrt{\dfrac{a}{a+b}}$ при *a = 4, b = 5.*

А7. Найдите значение выражения: $15\cdot 27^{-\frac{1}{3}}$.

А8. Найдите значение выражения: $\left(\dfrac{121^4}{625^2}\right)^{\frac{1}{8}}$.

А9. Найдите значение выражения: $\left(5^{\frac{5}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}-3^{\frac{5}{3}}\cdot 5^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\sqrt[3]{15}.$

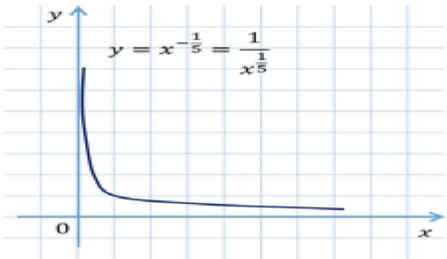
А10. Найдите значение выражения $\dfrac{p^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}+5}+\dfrac{5p^{\frac{1}{2}}}{p-25}$ при *p = 49.*

Практическое занятие №17

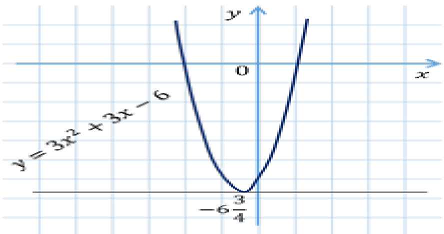
Степенные функции, их свойства и графики

Цель: содействие формированию умений по применению свойств степенной функции при решении упражнений на уровне применения знаний в сходной, новой и нестандартной ситуациях.

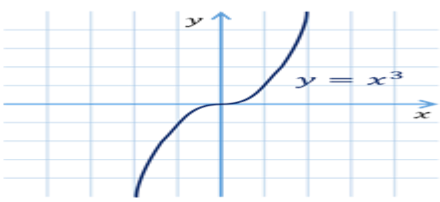
График функции $y = x^p$, где p — отрицательное нецелое число, имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}$.

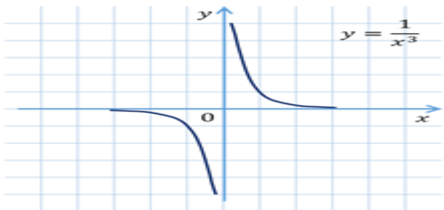


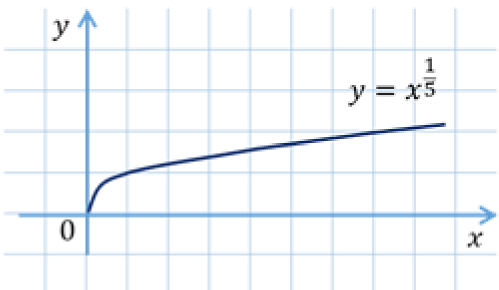
Функция $y = 3x^2 + 3x - 6$ является ограниченной снизу, так как $3x^2 + 3x - 6 = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 6\frac{3}{4} \geq -6\frac{3}{4}$. То есть парабола ограничена снизу прямой $y = -6\frac{3}{4}$.

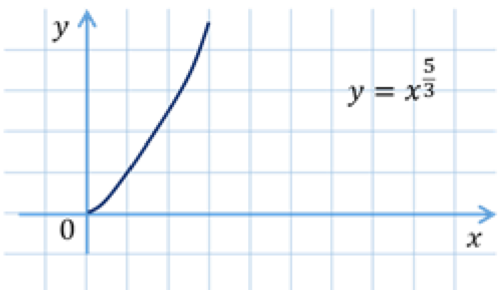


Показатель $p = 2n - 1$ *— нечётное натуральное число*









Варианты заданий практической работы

Постройте графики функций:

а) $y = (x+2)^{\frac{1}{2}}$;

б) $y = x^{\frac{7}{2}} - 3$;

в) $y = (x-1)^{-\frac{2}{3}}$;

г) $y = x^{-\frac{1}{3}} + 4$.

№. Решите графически уравнение: Решите графически неравенство:

а) $x^{\frac{1}{2}} = 6 - x$;	а) $x^{\frac{1}{2}} < 6 - x$
б) $x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{x^2}$;	б) $x^{\frac{3}{2}} \geq \frac{1}{x^2}$
в) $x^{\frac{1}{4}} = x^3$;	в) $x^{\frac{1}{4}} \leq x^3$
г) $x^{\frac{2}{3}} = x - 4$.	г) $x^{\frac{2}{3}} > x - 4$

Практическое занятие №18

Свойства степени с рациональным и действительным показателями

Цель работы: Обобщить и систематизировать знания по теме «Свойства корней и степеней»; закрепить умения использовать полученные знания для преобразования алгебраических выражений

Определение. Степенью числа а0 с рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$, где m - целое число, аn - натуральное (n1), называется число $\sqrt[n]{a^m}$, т.е.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ a > 0 \qquad a^0 = 1,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Свойства степени с рациональным показателем**.**

$a > 0,\ b > 0,\ p \in \mathbf{Q},\ q \in \mathbf{Q}$

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;
2. $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$;
3. $(a^p)^q = a^{pq}$;
4. $(ab)^p = a^p \cdot b^p$;
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Варианты заданий практической работы

<u>1 вариант</u>

<u>*Задание 1.*</u> Вычислить

а) $\sqrt[3]{12+4\sqrt{5}} \times \sqrt[3]{12-4\sqrt{5}}$;

б) ¿¿ ;

в) $(\sqrt{5^3}+\frac{1}{\sqrt{5^3}}) \div$ ¿) ;

г) $\frac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}+\frac{7+4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}$

Задание 2. Упростить выражение и найти его значение

а) $\frac{a^{\frac{7}{3}}+a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}$ при а = 2

б) $\frac{a^{\frac{5}{3}}c^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}c^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}c^{\frac{5}{3}}}$ при a=7, c=3

Задание 3. Избавиться от иррациональности в знаменателе

а) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$; б) $\frac{3\sqrt{c}}{\sqrt{c}+\sqrt{b}}$; в) $\frac{5-\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$; г) $\frac{6}{\sqrt[7]{64}}$ д) $\frac{a^6}{\sqrt[9]{a}}$

2 вариант

Задание 1. Вычислить

а) $\sqrt[5]{10+2\sqrt{17}} \times \sqrt[5]{10-2\sqrt{17}}$;

б) ¿¿ ;

в) $(\sqrt{7^3}-\frac{1}{\sqrt{7^3}}) \div$ ¿) ;

г) $\frac{8-4\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}+\frac{8+4\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}$.

Задание 2. Упростить выражение и найти его значение

а) $\frac{b^{\frac{5}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}$ при b=3

б) $\frac{a^{\frac{7}{5}}c^{\frac{2}{5}}+a^{\frac{2}{5}}c^{\frac{7}{5}}}{a^{\frac{7}{5}}c^{\frac{7}{5}}}$ при a=9, c=2

Задание 3. Избавиться от иррациональности в знаменателе а) $\frac{7}{5\sqrt{3}}$; б) $\frac{5\sqrt{c}}{\sqrt{c}-\sqrt{b}}$; в) $\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$; г) $\frac{12}{\sqrt[7]{81}}$; д) $\frac{a^7}{\sqrt[6]{a}}$

Практическое занятие №19
Алгоритм решения системы уравнений

Цель: формирование умений решать системы линейных уравнений разными способами: способом подстановки, способом алгебраического сложения

Обычно уравнения системы записывают в столбик одно под другим и объединяют фигурной скобкой

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

Система уравнений такого вида, где ***a, b, c*** – числа, а ***x, y*** - переменные, называется *системой линейных уравнений*.

При решении системы уравнений используют свойства, справедливые для решения уравнений.

2. Решение системы линейных уравнений способом подстановки

Рассмотрим пример $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = -10 \end{cases}$

1) Выразить в одном из уравнений переменную. Например, выразим **y** в первом уравнении, получим систему:

$$\begin{cases} y = 3x - 7 \\ 2x + 3y = -10 \end{cases}$$

2) Подставляем во второе уравнение системы вместо **y** выражение **3x-7**:

$$\begin{cases} y = 3x - 7 \\ 2x + 3\cdot(3x - 7) = -10 \end{cases}$$

3) Решаем полученное второе уравнение:

$$\begin{cases} y = 3x - 7 \\ x = 1 \end{cases}$$

4) Полученное решение подставляем в первое уравнение системы:

$$\begin{cases} y = 3\cdot 1 - 7 = -4 \\ x = 1 \end{cases}$$

Система уравнений имеет единственное решение: пару чисел ***x=1, y=-4***. Ответ: ***(1; -4)***, записывается в скобках, на первой позиции значение **x**, на второй - **y**.

3. Решение системы линейных уравнений способом сложения

Решим систему уравнений из предыдущего примера $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = -10 \end{cases}$ методом сложения.

1) Преобразовать систему таким образом, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными. Умножим первое уравнение системы на "3".

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = -10 \end{cases} \Bigg| \cdot 3$$

$$\begin{cases} 9x - 3y = 21 \\ 2x + 3y = -10 \end{cases}$$

2) Складываем почленно уравнения системы. Второе уравнение системы (любое) переписываем без изменений.

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ (2x + 3y) + (9x - 3y) = -10 + 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 11x = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 7 \\ x = 1 \end{cases}$$

3) Полученное решение подставляем в первое уравнение системы:

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 - y = 7 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ответ: $(1;\ -4)$

4. Решение системы линейных уравнений графическим способом

Графическое решение системы уравнений с двумя переменными сводится к отыскиванию координат общих точек графиков уравнений.

Графиком *линейной функции* является прямая. Две прямые на плоскости могут пересекаться в одной точке, быть параллельными или совпадать. Соответственно система уравнений может: а) иметь единственное решение; б) не иметь решений; в) иметь бесконечное множество решений.

2) Решением системы уравнений является точка (если уравнения являются линейными) пересечения графиков.

Графическое решение системы $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = -10 \end{cases}$

Варианты заданий практической работы

Вариант 1

А1. Решите уравнение:

а) x2 - x – 20 = 0; б) - x2 +7x + 8= 0.

А2. Решите неравенство:

а) 1,4x – 8 > 3x - 8 ; б) - x2 +6x + 7 > 0.

А3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x-2y=6, \\ x^2+6y=10. \end{cases}$

В1. Найдите область определения функции $y=\frac{\sqrt{5-2x}}{x-2}$.

С1. Решите уравнение: $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}$.

Задания А1-А3 соответствуют уровню обязательной подготовки.

Вариант 2

А1. Решите уравнение:

а) 2x – 9 = 3x + 16; б) (2x – 1)(x + 2) – 0,5x = - 2.

А2. Решите неравенство:

а) 4x + 2 > 16 - 3x ; б) 5x2 - 8x - 4 < 0.

А3. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 3x-2<4x, \\ 3+7x>5x. \end{cases}$

В1. Решите уравнение: $\frac{x}{x+3}-\frac{18}{x^2-9}=\frac{x+3}{3-x}$.

С1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} xy+x^2=3, \\ y^2+5x(x+y)=19. \end{cases}$.

1 $\begin{cases} y-x^2=1, \\ y-x=3. \end{cases}$;

1 $\begin{cases} x+2y=0, \\ 3x-y=7. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x^2-y=0, \\ 3x+2y=14. \end{cases}$;

2 $\begin{cases} x+y=3, \\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2\frac{1}{2}. \end{cases}$

3 $\begin{cases} xy=5, \\ x-2y=3. \end{cases}$

3 $\begin{cases} x-y=1, \\ (x-y)^2-xy=-1. \end{cases}$

Практическое занятие №20
Равносильность логарифмических уравнений

Логарифмическими уравнениями называются уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма (в частности, в основании логарифма).

Цели: продолжить формирование у студентов умений решать логарифмические уравнения . закрепить навыки решения логарифмических уравнений и неравенств

Воспитательная: воспитание самостоятельности, творческого подхода к решению задач.

Развивающая: развитие логического мышления, навыков сравнительного анализа.

Варианты заданий практической работы

Вариант 1	Вариант 2
1. Вычислить: 1) $\log_{\frac{1}{2}} 16$; 2) $5^{4\log_5 3}$; 3) $\log_3 135-\log_3 20+2\log_3 6$ 2. Найти область определения функции $y = \log_3 (x^2 - 13x + 12)$ 3. Решите уравнение: а) $\log_5(2x - 1) = 2$ б) $\log_2(x - 2) + \log_2 x = 3$ в) $\log^2_{\frac{1}{2}} x+3\log_{\frac{1}{2}} x+2=0$ 4. Решите неравенство и укажите все его целые решения	Вариант 2 1.Вычислить: 1) $\log_3 \frac{1}{27}$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2\log_{\frac{1}{3}} 7}$; 3) $\log_2 56+2\log_2 12-\log_2 63$ 2. Найти область определения функции $y = \lg (-x^2 - 5x + 14)$ 3. Решите уравнение: а) $\log_4(2x + 3) = 3$; б) $\log_3(x - 8) + \log_3 x = 2$ в) $\log^2_{0,2} x+\log_{0,2} x-6=0$ 4. Решите неравенство и укажите все его целые решения

$\log_3 x > \log_3(5 - x)$ 5. Решите неравенство: а) $\log_{\frac{1}{3}}(x-5) > -1$ б) $\log_4(x-2) + \log_4(x-8) < 2$	$\log_{\frac{1}{7}}(2x+3) < \log_{\frac{1}{7}}(3x-2)$ 5. Решите неравенство: а) $\log_5(x-3) < 2$; б) $\log_7(x-3{,}5) + \log_7(x-2) < 1$

Практическое занятие №21
Равносильность логарифмических неравенств

Цель работы: отработать навыки решения логарифмических неравенств

Решение логарифмических неравенств имеет много общего с решением показательных неравенств:
а) При переходе от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма, мы также сравниваем основание логарифма с единицей;

б) Если мы решаем **логарифмическое неравенство** с помощью замены переменных, то нужно решать относительно замены до получения простейшего неравенства.
Однако, есть одно очень важное отличие: поскольку логарифмическая функция имеет ограниченную область определения, при переходе от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма, необходимо учитывать область допустимых значений.
Если при решении логарифмического уравнения можно найти корни уравнения, а потом сделать проверку, то при решении логарифмического неравенства этот номер не проходит: при переходе от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма необходимо записывать ОДЗ неравенства.

Варианты заданий практической работы

1) $\log_6(2x-1) \le \log_6(3x+4)$

а) $(-\infty;\ -5]$; б) $[-5;+\infty)$; в) $[0{,}5;+\infty)$; г) $(0{,}5;+\infty)$

2) $\log_2 x > \log_2 7$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 4$ 3) $\log_x \frac{6x-5}{7} > 1$

4) $\log_{0{,}3}(3x+8) > -1$; 5) $\log_3(3x^2-4x+3) < 1$

6) $\log_{7{,}3} 3x > \log_{7{,}3}(1-5x)$; 7) $\log_3^2 x - 5\log_3 x + 6 > 0$

Вариант 2.
1. $\log_2(5x-9) \le \log_2(3x+1)$

2.$\log_{0,4}(12x + 2) \geq \log_{0,4}(10x + 16)$

3.$\log_8 (x^2 – 7x)$ □ 1

4.$\log_{1/2}^2 x + 5\log_{1/2} x - 2$ □ 0

5 $\log_{2,5}(6 – x)$ □ $\log_{2,5}(4 – 3x)$

6 .$\log_{1/2}(x^2 + 0,5x) \leq 1$

7.$\log_2 (x^2 – 6x + 24)$ □ 4

8 $2\log_2^2 x - 7\log_2 x - 4 \leq 0$

$\log_3|2x-5|=2.$

Практическое занятие №22

Системы логарифмических уравнений и неравенств

Для решения логарифмических уравнений мы использовали важное свойстволографмической функции – монотонность. Если функция $y = f(x)$ – монотонна, то уравнение $f(x) = a$ имеет не более 1 корня для любого a. Это свойство показательной и логарифмической функции позволило нам сделать выводы о единственности решения уравнений: $a^x = a^c$ и $\log_a x = \log_a c$

Варианты заданий практической работы.

1 $\begin{cases} \log_{\sqrt{5}}(2y - x) = 2 \\ \log_{\frac{1}{2}}(y - x) = -2 \end{cases}$.

2: $\begin{cases} \log_2(x + 3y) = 2 \\ \log_3 xy = 1 \end{cases}$.

3 $\begin{cases} \log_2 x - \log_3 y = 2 \\ 4\log_2 x - 5\log_3 y = 7 \end{cases}$

Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} \log x - \log y = 1, \\ \log^2 x + \log^2 y = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5, \\ 2\log_2 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$

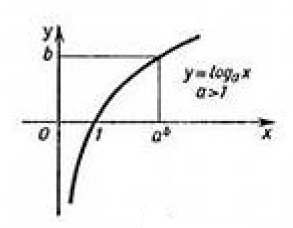
в) $\begin{cases} \log x - \log y = 7, \\ \log x + \log y = 5 \end{cases}$ г) $\begin{cases} \log_2(x+1) = \log_2\left(y + \frac{1}{4}\right), \\ \log_2 x - 2\log_2\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$

д) $\begin{cases} y - \log_3 x = 1, \\ x^y = 3^{12} \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3^{1+\log_3(x^2+y^2)} = 15, \\ \log_3(x^2 - y^2) - \log(x - y) = 25 \end{cases}$

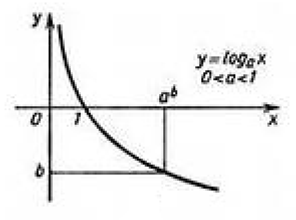
ж) $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^y = 5^{12} \end{cases}$ з) $\begin{cases} 5^{1+\log_5(x^2-y^2)} = 25, \\ \log_5(x^2 - y^2) = \log_5(x + y) \end{cases}$

Рассмотрим теперь простейшее логарифмическое неравенство: $\log_a x > b$. Под логарифмом должно стоять положительное выражение, поэтому ОДЗ: $x > 0$. Возможны два случая:

1) Для $a > 1$ график логарифмической функции выглядит следующим образом.



2) Для $0 < a < 1$ график логарифмической функции выглядит следующим образом.



$$\begin{cases} x + y = 8 \\ \log_{12} x = 1 - \log_{12} y \end{cases}$$

1 $\log_{0,5} x > \log_{0,5} 3$.

2 $\log_3 x \geq -1$

3 $\log_3(x+1) + \log_3(x-3) \geq 1$.

4 $\log_{0,7}(5x+1) < \log_{0,7}(3-2x)$.

5 $\log_2(2-x) < 3$.

6 $\log_3(\log_3(3-x)) < 1$.

Практическое занятие №23
Относительная частота события, свойство ее устойчивости

Относительной частотой случайного события в серии испытаний называется отношение числа испытаний, в которых это событие наступило, к числу всех испытаний.

В ходе исследований выяснилось, что относительная частота появления ожидаемого события при повторении опытов в одних и тех же условиях, может оставаться примерно одинаковой, незначительно отличаясь от некоторого числа p.

$$\frac{m}{n} \approx p$$

Пример.
При подбрасывании монеты отмечают те случаи, когда выпадает орёл. Если монета однородна и имеет правильную геометрическую форму, то шансы выпадения орла или решки будут примерно одинаковы. Но при небольшом количестве бросков такой результат может не получиться.
А вот если испытание проводиться большое количество раз, то относительная частота выпадения орла близка к относительной частоте выпадения решки.
А наш соотечественник Романовский, подбрасывая монету 80 тысяч 640 раз, нашёл, что относительная частота выпадения орла в его испытании была равна 0,4923.
Заметим, что в обоих случаях относительная частота выпадения орла очень близка к $\frac{1}{2}$.
Пример.1
В непрозрачном мешке лежит 7 зелёных и 12 синих кубиков. За раз можно доставать только 1 из них. Какова вероятность того, что из мешка достанут синий кубик?
Всего в мешке 19 кубиков. Значит, n=19.
Синий кубик мы можем достать 12 раз. Получаем, что m=12.
Относительная частота равна: $p = \frac{12}{19}$
Пример2
Определить относительную частоту появления буквы «о» в слове «достопримечательность».
Общее число букв, то есть n=21. А количество букв «о», то есть m=3.
Значит относительная частота: $p = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$
Пример.3
Отмечая число попаданий в корзину в каждой серии из 40 бросков, которые совершал баскетболист, получили такие данные:
$37, 32, 40, 39, 36$
Какова относительная вероятность попадания мяча в корзину для данного баскетболиста?
Определим общее число бросков. Было 5 серий по 40 бросков, то есть n=200.
Сосчитаем число попаданий в корзину: $m = 37 + 32 + 40 + 39 + 36$
Получили, что m=184.
Относительная вероятность попадания в корзину будет:
$p = \frac{184}{200} = \frac{23}{25} = 0{,}92$

Пример4.
Стрелок совершил 50 выстрелов. Относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,88. Сколько раз он промахнулся?
Зная общее число выстрелов n=50 и относительную вероятность попадания p=0,88. Найдем число попаданий в цель:

$$0{,}88 = \frac{m}{50} \Rightarrow m = 0{,}88 \cdot 50 = 44$$

Стрелок попал в цель 44 раза.
Найдём число промахов $50 - 44 = 6$
Стрелок промахнулся 6 раз.

подсчитать частоту появления гласных букв русского языка в произвольных текстах и выяснить основное свойство относительной частоты.

Варианты заданий практической работы

Задача 1. В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Задача 2. Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.

Задача 3. Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

Задача 4. В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Задача 5. В ящике находится 12 деталей, из которых 8 стандартных. Рабочий берет наудачу одну за другой две детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными

2 вариант

Задача 1**.** В урне 6 черных, 5 красных и 4 белых шара. Последовательно извлекают три шара без возврата. Найдите вероятность того, что первый шар окажется черным, второй – красным и третий – белым.

Задача 2. Колю отпускают гулять при условии сделанных уроков с вероятностью 0,8. Папа выдает ему деньги на мороженое с вероятностью 0,6. С какой вероятностью Коля пойдет гулять без мороженого?

Задача 3. В сборнике билетов по математике всего 25 билетов, в 10 из них встречается вопрос по неравенЗствам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по неравенствам.

Задача 4.. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов — первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Задача 5., Петя, Коля и Лёша бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет Петя.

Пример 4. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

Практическое занятие №24

Оценка вероятности события

-

1. Вероятность события *P(A)*	$P(A)=\frac{m}{n}$	
1. Размещения	$A_n^k=n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$	$A_5^3=5\cdot4\cdot3=60$
1. Перестановки	$P_n=A_n^k=n!$ $n!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot n$	
1. Сочетания	$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$	$C_5^3=\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}=10$
1. Формула Бернулли	$P_{m,n}=C_n^m p^m q^{n-m}$, $q=1-p$	

<u>Пример 1</u>

В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 3 шара, найти вероятность того, что они будут:

а) все белыми, б) все одного цвета, в) ровно два черных.

Решение: общее количества исходов: всего в урне: 15 + 5 + 10 = 30 шаров, извлекаем три шара. Нам не важно в какой последовательности появятся эти шары. Найдем, сколько всего существует способов извлечь из урны 3 шара: сочетания 3 из 30

$$n = C_{30}^3 = \frac{30!}{3!\cdot27!} = \frac{28\cdot29\cdot30}{1\cdot2\cdot3} = 14\cdot29\cdot10 = 4060 \text{ способов всего}$$

Таким образом, общее число исходов: $n=4060$

Пример 2

Рассмотрим событие: А – «из урны будут извлечены 3 белых шара». Данному событию благоприятствуют <u>m элементарных</u> исходов – в урне всего 15 белых шаров, извлечь все три белых можно (сочетания 3 из

$$m = C_{15}^3 = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 13 \cdot 7 \cdot 5 = 455$$

15) способами.

поэтому по классическому определению:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{455}{4060} \approx 0{,}11$$

– вероятность того, что из урны будут извлечены 3 белых шара.

Пример3

Событие В –«из урны будут извлечены три шара одного цвета» - означает, что все три шара будут ЛИБО белые, ЛИБО красные, ЛИБО черные. Сначала подсчитаем, сколькими способами из урны можно по отдельности извлечь три красных и три черных шара, так как три белых шара могут быть извлечены 455 способами (см. пункт а)

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 2 \cdot 5 = 10$$

3 красных шара- (сочетания 3 из 5) сп.

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 3 \cdot 10 = 120$$

3 черных шара- (сочетания 3 из 10) сп.

Так как в этом условии работает логическая связка ИЛИ, по правилу сложения получаем, что три белых, или три красных, или три черных шара можно извлечь 455+10+120 =585 способами, это и будет число m- благоприятных исходов.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{585}{4060} \approx 0{,}14$$

– вероятность того, что из урны будут извлечены 3 шара одного цвета.

Пример4

Событие С –«из урны будут извлечены l два черных шара» - означает, что два шара будут черные, а третий ЛИБО красный, ЛИБО белый. Таким образом нас устраивает комбинации: <u>2 черных И 1 красный</u> ИЛИ <u>2 черных И 1 белый</u>. Сначала подсчитаем, сколькими способами из урны можно извлечь два черных шара:

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2} = 9 \cdot 5 = 45$$

2 черных шара- (сочетания 2 из 10) сп.

$$C_{15}^1 = 15 \text{ способами,}$$

1 белый шар можно извлечь

$$C_5^1 = 5 \text{ способами.}$$

1 красный -

$$45 \cdot 15 = 675 \text{ сп.}$$

2 черных и 1 белый–

– 2 черных и 1красный

$$45 \cdot 5 = 225 \text{ сп.}$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{900}{4060} \approx 0{,}22$$

вероятность того, что из урны будут извлечены ровно 2 черных шара

<u>Пример 5.</u>Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60-ти. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на 2 из 3-х вопросов?

Решение: итак, расклад таков: всего 60 вопросов, среди которых 25 «хороших» и, соответственно, 60 – 25 = 35 «плохих». Ситуация шаткая и не в пользу студента. Давайте узнаем, насколько хороши его шансы:

$$C_{60}^{3} = \frac{60!}{57! \cdot 3!} = \frac{58 \cdot 59 \cdot 60}{6} = 34220$$

способами можно выбрать 3 вопроса из 60-ти *(общее количество исходов)*.

Для того чтобы сдать экзамен, нужно ответить на 2 или 3 вопроса. Считаем благоприятствующие комбинации:

$$C_{25}^{2} \cdot C_{35}^{1} = \frac{25!}{23! \cdot 2!} \cdot 35 = \frac{24 \cdot 25}{2} \cdot 35 = 10500$$

способами можно выбрать 2 «хороших» вопроса и один «плохой»;

1. Решите уравнение:

2. Бригадир должен отправить на работу бригаду из 3-х человек. Сколько таких бригад можно составить из 8 человек?

3. Брошена игральная кость. Найти вероятность:

а) появления четного числа очков;

б) появления не больше двух очков.

3. В партии из 15 деталей имеется 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад деталей 3 стандартные.

2. Сколькими способами можно расставить 6 томов энциклопедии, чтобы они стояли в беспорядке?

3. В урне 5 белых и 10 черных шаров. Из урны наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется:

а) черным;б) белым

4. Первенство по футболу оспаривают 20 команд, среди которых 7 лидирующих. Путем жеребьевки команды распределяются на две группы по

10 команд в каждой. Какова вероятность попадания всех лидирующих команд в одну группу?

Варианты заданий практической работы

1. Решите уравнение: $A_x^3 = \frac{1}{20} \cdot A_x^4$

2. Бригадир должен отправить на работу бригаду из 3-х человек. Сколько таких бригад можно составить из 8 человек?

3. Брошена игральная кость. Найти вероятность:

а) появления четного числа очков;

б) появления не больше двух очков.

4. В партии из 15 деталей имеется 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад деталей 3 стандартные.

1. Решите уравнение: $30x = A_x^3$

2. Сколькими способами можно расставить 6 томов энциклопедии, чтобы они стояли в беспорядке?

3. В урне 5 белых и 10 черных шаров. Из урны наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется:
а) черным;
б) белым.
4. Первенство по футболу оспаривают 20 команд, среди которых 7 лидирующих. Путем жеребьевки команды распределяются на две группы по 5 команд в каждой. Какова вероятность попадания всех лидирующих команд в одну группу?

Практическое занятие№25
Общие методы решения уравнений

Цели занятия: Обучающая: Освоение знаний основных приемов решения уравнений Развивающая: Формирование умений рационально использовать приемы решения уравнений

1. Метод разложения на множители.
2. Метод введения новой переменной.
3. Метод замены уравнения равносильным.

1Замена одного выражения другим, тождественно равным ему.

Например, уравнение $(3x+2)^2 = 15x+10$ можно заменить следующим равносильным:

$9x^2 + 12x + 4 = 15x + 10$

2Перенос членов уравнения из одной стороны в другую с обратными знаками.

Так, в предыдущем уравнении мы можем перенести все его члены из правой части в левую со знаком « – »: $9x^2 + 12x + 4 – 15x – 10 = 0$, после чего получим: $9x^2 – 3x – 6 = 0$.

Уравнение $x – 1 = 0$ имеет единственный корень $x = 1$. Умножив обе его части на $x – 3$, мы получим уравнение $(x – 1)(x – 3) = 0$, у которого два корня: $x = 1$ и $x = 3$. Последнее значение не является корнем заданного уравнения $x – 1 = 0$. Это так называемый *посторонний корень*. И наоборот, деление может привести к *потере корня*. Так, если $(x – 1)(x – 3) = 0$ является исходным уравнением, то корень $x = 3$ будет потерян при делении обеих частей уравнения на $x – 3$.

Можно *возвести обе части уравнения в нечетную степень* или *извлечь из обеих частей уравнения корень нечетной степени*. Необходимо помнить, что: а) возведение в *четную степень* может привести *к приобретению посторонних корней*;
б) *неправильное* извлечение *корня четной степени* может привести к *потере корней*.
Уравнение $7x = 35$ имеет единственный корень $x = 5$. Возведя обе части этого уравнения в квадрат, получим уравнение: $49x^2 = 1225$, имеющее два корня: $x = 5$ и $x = – 5$. Последнее значение является посторонним корнем.

Варианты заданий практической работы

Пример 1. Решить уравнение: $9^x – 7 \cdot 3^x = - 12$

Решение: $^x – 7 \cdot 3^x = - 12$; Пусть $3^x = t$, t 0; $t^2 - 7t + 12=0$; D = 1; $t_1 = 3$, $t_2=4$

Делаем обратную замену 1) $3^x = 3$; 2) $3^x = 4$

$x_1 = …$; $x_2 = \log_3 4$
Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = \log_3 4$.

Пример 2. Решить уравнение: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-5}=\left(\frac{1}{81}\right)^x$

Решение: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-5}=\left(\frac{1}{81}\right)^x$. Уравниваем основания :
$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-5}=\left(\frac{1}{3}\right)^{4x}$; $x^2-5=4x$; $x^2-4x-5=0$; $D= ….$ $x_1=…$; $x_2=-1$.

Ответ: $x_1= 5$; $x_2 = - 1$

Пример 3. Решить уравнение: $\log_5 (x^2 - 10) = \log_5 9x$

Решение**:** $\log_5 (x^2 - 10) = \log_5 9x$; $x^2 - 9x – 10 = 0$, D = …; $x_1=10$, $x_2= -1$

Проверка: при x = 10, $\log_5 (10^2 - 10) = \log_5 (9 \cdot 10)$ – верно

Ответ**:** x = 10

Пример 4. Решить уравнение: $\log_7 (x^2 + 6x) = 1$;

Решение: $\log_7 (x^2 + 6x) = 1$;

$x^2 + 6x = 7^1$; $x^2 + 6x – 7 = 0$; $D = 64$; $x_1 = - 7$ u $x_2 = …$

Проверка: при $x = - 7$, $\log_7 ((- 7)^2 + 6 \cdot(-7)) = 1$ – верно

при $x = 1$, $\log_7 (1^2 + 6 \cdot 1) = 1$ – верно

Ответ. $x_1 = - 7$; $x_2 = 1$.

Пример 5. Решить уравнение $\log_2 (x – 5) + \log_2 (x +2) = 3$

Решение**:** $\log_2 (x – 5) + \log_2 (x +2) = 3$

Используем свойство логарифмов: $\log_2((x-5)(x + 2)) = 3$; $(x-5)(x+2) = 2^3$; $(x-5)(x+2) = 8$;

$x^2 + …x – 5x – 10 = 8$; $x^2 – 3x - 18 = 0$; $D = …$; $x_1 = – 3$; $x_2 = ….$

Проверка: при $x = – 3$, $\log_2 (– 3 – 5) + \log_2 (– 3 +2) = 3$ – неверно

При $x = 6$, $\log_2 (6 – 5) + \log_2 (6 + 2) = 3$ – верно

Ответ**:** $x = 6$.

Пример 6. Решить уравнение: $\log_2^2 x-4\log_2 x+3=0$.

Решение: $\log_2^2 x-4\log_2 x+3=0$

Пусть $\log_2 x=y$, тогда $y^2 – 4y + 3 = 0$; $D = …$; $y_1 = 1$; $y_2 = …$

Сделаем обратную подстановку:

1) $\log_2 x$ $= 1$; $x = 2$; 2) $\log_2 x$ $= 3$; $x = 2^3$; $x = …$

Ответ: $x = 2$, $x = 8$.

1. Решить уравнение: $4^x – 6 \cdot 2^x = – 8$

2. Решить уравнение: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5}=\left(\frac{1}{16}\right)^x$

3 Решить уравнение: $\log_3 (x^2 + 6) = \log_3 5x$

4. Решить уравнение: $\log_{12} (x^2 – x) = 1$

5 Решить уравнение: $\log_{\frac{1}{3}}(2+x)$ + $\log_{\frac{1}{3}}(5+4x)$ $= 0$

6. Решить уравнение: $\log^2{}_2 X – 4 \log_2 X = 12$

Практическое занятие№26

Общие методы решения уравнений

Цель: создать условия для усвоения новых знаний учащимися на основе ранее изученного материала с ориентацией на их практическое применение, обеспечить усвоение всеми студентами требований образовательного стандарта по теме «Общие методы решения уравнений»;

Метод введения новой переменной используется в случае, когда после упрощения обеих частей уравнения появилась возможность обозначить какую-то степень другой переменной и, при этом, все остальные степени также будут выражаться через введённую переменную.

Например, $4^x+8=6\cdot 2^x$

$(2^x)^2-6\cdot 2^x+8=0$

Введём новую переменную: $2^x=t,\ t>0$, тогда уравнение принимает вид:

$t^2-6t+8=0$

$\left[\begin{array}{l} t_1=2, \\ t_2=4. \end{array}\right.$

Возвращаемся к исходной переменной:

$\left[\begin{array}{l} 2^x=2, \\ 2^x=4 \end{array}\right.$ ▯ $\left[\begin{array}{l} 2^x=2^1, \\ 2^x=2^2, \end{array}\right.$ ▯ $\left[\begin{array}{l} x_1=1, \\ x_2=2. \end{array}\right.$

Ответ: $1; 2$.

Варианты заданий практической работы

I. Решите уравнения:

1. $2^{x+5}=32$ **1.** $5^{x-2}=25$

2. $5^{2x}+8=9$ **2.** $3^{x-4}=1$

3. $3^{x+2}-3^x=72$ **3.** $2^{x+2}+2^x=5$

4. $25^x-6\cdot 5^x+5=0$ **4.** $9^x-6\cdot 3^x-27=0$

5. $\left(17^{\sqrt{x^2+2x-8}}\right)^{x+3}=1$ **5.** $\left(15^{x^2+x-2}\right)^{\sqrt{x-4}}=1$

6. . $6^{x-3}=36$ **6. .** $5^{x-3}=125$

7. $5^{x-6}=1$ **7.** $4^{x+1}-3=-2$

8. $3^{x+2}+3^x=30$ **8.** $2^{x+3}-2^x=112$

9. . $4^x-14\cdot 2^x-32=0$ **9.** $9^x-4\cdot 3^x+3=0$

10. $\left(0{,}7^{x-4}\right)^{\sqrt{x^2-2x-15}}=1$ **10 .** $\left(15^{x^2+x-2}\right)^{\sqrt{x-4}}=1$

Практическое занятие№27
Уравнения и неравенства с модулем и с параметрами
Простейшие неравенства с параметром

Решить неравенство с параметром — значит для каждого значения параметра найти множество всех решений данного неравенства или доказать, что решений нет.

1. Уравнение

$ax + b = cx + d,$

где a, b, c, d □ **R**, сводится к линейному уравнению (1):

$ax + b = cx + d$ □ $(a - c)x + (b - d) = 0,$

или

$ax + b = cx + d$ □ $(a - c)x = d - b.$

Замечание 2. Уравнение

$(ax + b)(cx + d) = 0$

где a, b, c, d □ **R**, сводится к совокупности линейных уравнений

$$\left[\begin{array}{l} ax + b = 0, \\ cx + d = 0. \end{array}\right.$$

Варианты заданий практической работы

Пример 1. Решить уравнения

a) $\frac{3x}{2} - 3 = \frac{x}{3} + 4$, c) $-x + 2 = 2 - x$,

b) $2x + 1 = 2x + 3$, d) $(2x + 4)(3x - 1) = 0$.

Пример2

a) $ax = 1$;

b) $a^2x - 1 = x + a$;

c) $ax + b = cx + d$;

d) $\frac{x-2a}{x-4} = 0$;

e) $\frac{(x-a)(2x+a)}{(x+1)(x-2)} = 0$;

f) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = c$;

g) $\frac{2}{5x-a} = \frac{3}{ax-1}$.

Пример 3. Решить уравнения

a) $|x - a| = 2$; c) $|x - a| + |x - 2a| = a$;

b) $|x| + |x - a| = 0$; d) $|x - 1| + |x - 2| = a$.

1) Решите уравнение (в + 1)·x = 3 – в.

Ответы:

а) при в = 2 нет корней; при в ≠2, x = $\frac{в+5}{в-2}$;

б) при в = -2 нет корней, при в ≠-2 x = $\frac{в-2}{в+5}$

в) при в = -1 нет корней, при а ≠ - 1 $x = \frac{3-в}{в+1}$

2) При каких значениях параметра с уравнение имеет бесконечное множество решений?

$(c^2 – 4)\cdot x = (c – 2)\cdot(c+ 1)$.

Ответ: а) при с = -1, x ∈ R,

б) при с = 2, x ∈ R,

в) при с = - 1, x ∈ R,

3) При каких значениях параметра m уравнения не имеет решений?

$\frac{x}{x-5} = \frac{m-3}{x-5}$.

Ответы: а) при m = 6 нет корней;

б) при m = 7 нет корней;

в) при m = 8 нет корней.

4) Решить уравнение $\frac{a}{2a-x} = 4$.

Ответы:

а) при а = 0 нет корней, при а ≠ 0 x = $\frac{a}{4}$;

б) при а = 0 нет корней, при а ≠ 0 x = $\frac{7-a}{4}$;

в) при а = 0 нет корней, а ≠ 0 x = - 2a.

1) Решите уравнение (в + 1)·x = 3 – в.

Ответы:

Практическое занятие№28

Уравнения и неравенства с модулем и с параметрами

Варианты заданий практической работы

1. Решить уравнения

a) $\frac{3x}{2} - 3 = \frac{x}{3} + 4$, c) $-x + 2 = 2 - x$,

b) $2x + 1 = 2x + 3$, d) $(2x + 4)(3x - 1) = 0$.

Пример 2. Решить уравнения

a) $ax = 1$; e) $\frac{(x-a)(2x+a)}{(x+1)(x-2)} = 0$;

b) $a^2x - 1 = x + a$; f) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = c$;

Пример 3. Решить уравнения

a) $|x - a| = 2$; c) $|x - a| + |x - 2a| = a$;

b) $|x| + |x - a| = 0$; d) $|x - 1| + |x - 2| = a$.

Пример 1. Решить неравенства

a) $3x + 6 > 0$; c) $2(x + 1) + x < 3x + 1$;

b) $-2x + 3 \geq 0$; d) $3x + 2 \geq 3(x - 1) + 1$.

Пример 2. Решить неравенства

a) $ax \leq 1$;

b) $|x - 2| > -(a - 1)^2$;

c) $3(4a - x) < 2ax + 3$;

d) $abx + b > ax + 3$;

e) $\frac{3x+4}{a^2-1} - \frac{2x+1}{a-1} \leq \frac{x}{a+1}$;

f) $ax + b > cx + d$;

Пример 3. Решить неравенства

a) $|x + a| + |x - 2a| < 4a$; c) $|x + a| > 2$;

b) $|x + a| < |a|x$; d) $|x - a| \leq a$.

2.2. Задания для промежуточной аттестация

Задания для проведения

аттестации студентов ПОО в письменной форме по дисциплине: «Математика» в учебном году

Вариант 1

1. Упростите выражение и найдите его значение $((a+3b)/(a^2-3ab)-1/a) : b/(3b-a)$

при $a = 7{,}5$, $b = \sqrt{3}-5$

2. Сократите дробь $(⟦(3x)⟧^2\cdot x^{-8})/(x^{-12}\cdot ⟦4x⟧^6)$

3. Вычислите значение выражения $\log_3 \log_2 2^3-1$

4. Решите уравнение $\sqrt{x^2-x-1}=1$

5. Найдите область определения функции $y = \sqrt{3^{4x-5}-81}$

6. Найдите точки экстремума функции $f(x) = ⟦3x⟧^3+ ⟦9x⟧^2+5x+4$

7. Решите уравнение $⟦2\cos⟧^2 x-\sin ⟦x+1=0⟧$

8. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2+1$, $x = -1$,

$x = 2$, $y = 0$

9. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см, а один из катетов равен 4 см. Найдите проекцию другого катета на гипотенузу

10. Осевое сечение цилиндра – квадрат. Диагональ осевого сечения 8 см. Найдите объём цилиндра

Критерии оценивания:

5 (отлично) – любые правильно выполненные 8 заданий, два из которых геометрические задания;

4 (хорошо) - любые правильно выполненные 7 заданий, одно из которых геометрическое задание;

3 (удовлетворительно) - любые правильно выполненные 5 заданий,

2 (неудовлетворительно) - менее 5 выполненных заданий

3. Рекомендуемая литература и иные источники

Александров А.Д. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 класс : учеб. для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М. : Просвещение, 2020. – 271 с.

Александров А.Д. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия 11 класс : учеб. для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М. : Просвещение, 2021. – 272 с.

Башмаков М.И. Математика. Задачник : учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / М.И. Башмаков. – 4-е изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия» , 2020. – 416 с.

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – М. : Просвещение, 2020. – 431 с.

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10–11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. – М. : просвещение, 2021. – 255 с.

Пратусевич М.Я. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учеб. для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н. Головин. – М. : Просвещение, 2021. – 463 с.